COMPLEMENTO

Á LA

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

Empleo de un solo plano de proyeccion

VALIÉNDOSE DEL

SISTEMA DE ACOTACIONES

PARA SERVIR DE APLICACION

de los principios generales de la ciencia

Á LAS

SUPERFICIES IRREGULARES,

y como preliminar

Á LA



Y Á LA

DESENFILADA

DE LAS OBRAS DE FORTIFICACION.

Por el Capitan de Ingenieros

D. ANGEL RODRIGUEZ ARROQUIA.

MADRID.—1850.

Imprenta de Boix mayor y Compañía, calle de Capellanes, número 10.

COMPLEMENTO

A LA

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

COMPLEMENTO

A LA

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

Empleo de un solo plano de proyeccion

VALIÉNDOSE DEL

SISTEMA DE ACOTACIONES

PARA SERVIR DE APLICACION

de los principios generales de la ciencia

A LAS

SUPERFICIES IRREGULARES,

y como preliminar

A LA

TOPOGRAFIA

Y A LA

DESENFILADA

DE LAS OBRAS DE FORTIFICACION.

Por el Capitan de Ingenieros

Don Angel Rodriguez Arroquia.

MADRID.—1850.

Imprenta de **Boix Mayor y Compañía**, calle de Capellanes, número 10.

.....acotando las alturas relativamente á un plano de nivel general, que se imagine pasa por el punto mas bajo.....

Ordenanzas de Ingenieros
Reglamento 2.° —*Tít.* 2.° —*Art.* 1.° —*Pár.* 4.°

INTRODUCCION.

IDEA GENERAL

DEL SISTEMA DE ACOTACIONES.

Facil es figurarse lo embarazosa que será la resolucion gráfica, por el método de dos proyecciones, de toda cuestion geométrica en la que entren en combinacion datos cuyo desarrollo en un sentido cualquiera sea escesivamente grande con relacion á sus demas dimensiones. En efecto, al proyectar cuerpos de esta naturaleza en una superficie tan limitada como lo es una hoja de papel, no es posible prescindir de atribuir valores considerables á la escala del dibujo para proporcionar espacio suficiente á la descripcion de una de sus proyecciones, ni dejar de usar de la misma escala en la segunda para efectuar las construcciones gráficas á que dé lugar el problema. Síguese naturalmente de esta necesidad la inexactitud, la confusion y la dificultad consiguiente en la resolucion de cuestiones ó establecimiento de proyectos, que por otra parte se ofrecen á la imaginacion con claridad y sencillez.

Otros inconvenientes no menos notables suelen presentarse tambien, independientemente de la magnitud de los objetos; nacen de la necesidad casi continua de tener que operar en la práctica con superficies á las que no puede asignárseles ninguna ley fija de generacion, y por consiguiente agenas por su índole al método gráfico de espresion por ambas proyecciones.

Preciso es, pues, en estas circunstancias apelar á otros modos de representacion, en los que estos embarazos, estraños al pensamiento y á su descripcion, hayan desaparecido.

El sistema de acotaciones que nos vá á ocupar destruye estos inconvenientes: consiste en escluir la espresion gráfica de la proyeccion vertical de los objetos, considerando únicamente de un modo esplícito la horizontal elegida de un modo conveniente. Para reemplazar aquella proyeccion, puesto que, segun el sistema admitido generalmente, no es otra cosa sino la espresion gráfica de las alturas que los puntos tienen sobre el plano horizontal en que se proyectan, supónese esté *inferior* una cierta cantidad á todos los objetos, y escritos en él, al lado de la proyeccion de cada punto, números que reciben el nombre de *cotas*, y espresan con sus unidades sus alturas sobre el plano indicado, que se llama *Plano de comparacion.*

Las cotas, desde luego, suponen referencia á una escala que será la horizontal del dibujo.

De este modo podremos con facilidad apreciar numéricamente resultados, que no podrian obtenerse con la suficiente exactitud por medio de construcciones gráficas en los casos que hemos espresado.

La descripcion será completa por este sistema; dos proyecciones bastan para definir geométricamente un cuerpo, puesto que la tercera puede deducirse inmediatamente de ellas: una proyeccion la tenemos gráficamente

espresada en el plano de comparacion; la segunda está implícitamente contenida en las cotas, pudiendo ser igualmente deducida de ambas la tercera.

Nada por consiguiente puede influir este género de proyeccion en la aplicacion general de los principios de la geometría descriptiva, ni en la esencia de los resultados que se busquen; lo único que se habrá conseguido es presentarlos, en numerosos casos, bajo una nueva forma sencilla y perceptible con ventajas.

Acaso ocurrirá el estrañar por qué la geometría descriptiva no se trata por este sistema que parece abrazar todos los casos; la razon se presenta con facilidad. Es preciso no generalizar demasiado los métodos. Para esplanar todos los principios que constituyen la espresada ciencia no es necesario considerar sino cuestiones abstractas, cuyos datos pueden elegirse de modo que se presten con sencillez, por su naturaleza y magnitud, al fin que se apetece. Pero cuando se abandone este vasto campo ideal para descender á sus numerosas aplicaciones, cuando se toque la realidad, se concibe perfectamente que puede haber muchos casos en los que nos sea hasta indispensable el separarnos del sistema gráfico de representacion, que la geometría descriptiva emplea esclusivamente.

Tal sucede en la topografía, en los proyectos de fortificacion, en los planos de conjunto de caminos, canales, etc.: imposible es emplear en ellos con claridad el método gráfico de las dos proyecciones, por la poca dominacion de las obras respecto á su desarrollo horizontal; igualmente lo es el querer sujetar á una ley de generacion constante la superficie irregular del suelo sobre que se asientan las obras; pero seria absurdo al mismo tiempo querer que el método de acotaciones, tan útil en estas circunstancias, respondiese con ventajas á ciertas cuestiones de detal, aun relativas á los mismos proyectos,

Hemos dicho que podia fijarse el lugar geométrico de un sistema cualquiera de puntos por medio de sus proyecciones en el plano de comparacion y sus diferentes cotas; aunque esto, teóricamente hablando, nada deja que desear, se vé sin embargo la imposibilidad de aplicarlo tal como queda enunciado; imposible es, en efecto, escribir la infinidad de cotas que serian necesarias á un proyecto, ademas de que nada hablaria á la vista la descripcion aislada de los puntos, aun cuando se admitiese la posibilidad de efectuarlo.

Pero estos inconvenientes se obvian con facilidad, valiéndose del recurso de suponer cortado el espresado sistema de líneas ó superficies por una série de planos horizontales, tan próximos como queramos imaginarlos, proyectar sus intersecciones y anotar en ellas la altura que tiene sobre el plano de comparacion aquel á que se refieren. De este modo obtendremos cotas espaciadas, dependientes de una ley marcada en las líneas, y rectas ó curvas ordenadamente trazadas en las superficies, que las espresarán suficientemente á la vista.

Lám. 1.ª Sean (m,m') las proyecciones de un punto aislado; si
Fig. 1.ª suponemos cortada su proyectante vertical por una série (X) de planos horizontales equidistantes, cuyas trazas sean las (2–4–6–etc.) la proyeccion horizontal (m) anotada con el número (8) nos dará á conocer su posicion verdadera.

Fig. 2 y 3. Del mismo modo, la proyeccion horizontal de la recta (AB) y las cotas (2–4–6–etc.) de sus intersecciones con la espresada série de planos la darán suficientemente á conocer, y lo mismo podriamos decir con referencia á una línea curva.

Fig. 4. Si se tratase del plano cuyas trazas son las (SUT), sus rectas de interseccion (0–2–4–etc.) con los planos horizontales bastarian para determinarlo.

Cuando la superficie fuese curva, la única diferencia estribaria en ser curvas tambien las intersecciones acotadas. Fig. 5.

Parece sin embargo que caemos, con la modificacion enunciada, en el inconveniente de escaparse á nuestra investigacion multitud de puntos cuya consideracion nos es necesaria; pero esto no se verifica así, como veremos en la ampliacion de la idea general que hemos espuesto, y que inmediatamente vá á ocuparnos.

[illegible]

CAPITULO I.

DESARROLLO DEL SISTEMA.

PUNTOS AISLADOS.

Un punto aislado está fijo de posicion por su proyeccion horizontal y su cota correspondiente; cuando aquella pertenezca á dos ó mas puntos distintos, otras tantas cotas escritas al lado de su comun proyeccion nos darán á conocer, ademas de su existencia, la sucesion de sus alturas. Lám. 2. Fig. 6.

LINEAS RECTAS.

Las proyecciones acotadas de dos puntos cualesquiera definen completamente la recta que determinan; en efecto, en estos datos están implícitamente contenidas las cotas de sus demas puntos.

Sean, por ejemplo (a–4) y (b–7), los puntos dados; la proyeccion horizontal de la recta que los comprende será la que une sus proyecciones: si suponemos abatido su plano proyectante sobre el de comparacion, nos resultará un trapecio ($aAB'b$) cuyos tres lados perpendiculares podrán ser siempre valuados en números por medio de la escala del dibujo. Ahora bien, si quisiéramos saber cuál es la cota perteneciente á un punto cualquiera (d) de la Fig. 7.

proyeccion de la recta dada, tirándole por el punto (A) la paralela (AB) y por el (*d*) la perpendicular (dD') tendremos dos triángulos semejantes (ABB') y (ADD') los cuales por medio de la proporcion

$$\overline{AB} : \overline{BB'} :: \overline{AD} : \overline{DD'} \ldots\ldots (\alpha)$$

nos darán resuelto el problema, pues conoceremos numéricamente la diferencia $(\overline{DD'})$ de cotas, entre la perteneciente al punto (*d*) que tratamos de determinar, y la del (*a*) conocida de antemano.

Del mismo modo, y con los mismos datos, hubiéramos resuelto el problema inverso de encontrar la proyeccion de un punto perteneciente á una recta, y cuya cota se señale: estaria reducido á despejar en la proporcion (α) la distancia $(\overline{AD})$ que entonces resultaria desconocida.

Aunque el procedimiento espuesto es general y exacto, el inconveniente de exigir un cálculo para cada punto que necesitemos hace desterrarlo de la práctica; se sustituye con otro que, aunque solamente aproximado, lo es suficientemente para que el error sea inapreciable.

Consiste en suponer en el último problema que la distancia $(\overline{AD})$ que buscamos, es la perteneciente á la diferencia (1) de cotas, para no acotar en la recta sino los puntos relativos á esta equidistancia. Bajo estos supuestos la proporcion (α) dará

$$\overline{BB'} : \overline{AB} :: 1 : x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}}$$

lo cual nos proporcionará, dividiendo la distancia horizontal entre los puntos dados por la diferencia de cotas, en-

contrar una magnitud en la escala, que aplicada con el compás á partir de uno de los dos puntos conocidos, nos irá dando aquellos cuyas cotas correspondientes difieran sucesivamente en la unidad.

El resultado anterior, como general, es aplicable al caso en que las cotas dadas no fuesen enteras; pero en este caso hay que añadir una ligera modificacion á lo espuesto anteriormente, con el objeto de que las cotas que resulten para cada unidad de diferencia no sean igualmente fraccionarias.

Sean por ejemplo (4,5) y (2,8) las cotas conocidas; determinando por medio de ellas la magnitud (x), tomaremos sus (0,5) á la derecha del punto (4,5) ó sus (0,8) á la del (2,8) y tendremos los puntos (4) y (2), á partir de los cuales la magnitud (x) aplicada sucesivamente nos dará cotas enteras para los puntos que determine. Fig. 8.

Como nos es fácil hacer un raciocinio análogo con respecto á la magnitud (x), podemos dividirla en décimas, centésimas, etc., y llegar á formar una verdadera *escala de pendiente* de la recta, que nos proporcionará los medios de designar la cota de cualquier punto de ella cuya proyeccion se señale, ó á la inversa. Fig. 9.

En la práctica, dada una recta por las proyecciones acotadas de dos de sus puntos, se procede desde luego á construir gráficamente su escala de pendiente en la misma proyeccion de la línea, lo que no puede ofrecer dificultades, y nos dará desde luego resueltos los problemas anteriores.

Una recta vertical estará representada por un punto que será su traza horizontal: la falta de cotas podrá caracterizar suficientemente esta línea; sin embargo, para que no pueda ser confundida con un punto aislado, se distinguirá por una letra que marque su traza. Como podemos suponer al punto que sea proyeccion de una recta vertical, Fig. 10.

todas las cotas, desde cero hasta el infinito, resulta que todos los puntos de esta recta pueden ser acotados, y por consiguiente queda completamente definida.

Fig. 11. Si la recta fuere horizontal, quedaria determinada por su proyeccion anotada con una sola cota que espresase su altura sobre el plano de comparacion. Se acostumbra, sin embargo, á acotar dos puntos diferentes de una recta horizontal con el fin de evitar cualquiera duda que pudiera ocurrir sobre la naturaleza de una línea dada á conocer por una sola cota.

Fig. 12. Cuando dos ó mas rectas existan en un mismo plano vertical, las diferentes séries de cotas que acompañarán su comun proyeccion darán á conocer su existencia. La proyeccion (AB) pertenecerá á dos rectas horizontales cortadas por una vertical, existentes en el mismo plano, cuya traza es la proyeccion comun de todas ellas.

Fig. 13. La (CD) será la indicacion de dos rectas inclinadas diferentemente con respecto al plano de comparacion.

LINEAS CURVAS.

Generalmente las curvas existen en superficies determinadas de antemano, ó bien en planos, por resultado de intersecciones con las referidas superficies conocidas; en ambos casos podemos dispensarnos de escribir las cotas de las espresadas líneas, pues serán las mismas que corresponden á las superficies á que están íntimamente ligadas. Sin embargo, pueden ocurrir algunos casos, tales como en la descripcion de superficies, en que es preciso considerar estas curvas aisladas, y bajo este aspecto vamos á ocuparnos de ellas.

En general no es posible sujetar á una escala, como sucede en las rectas, la sucesion de cotas de una línea

curva, por no guardar una relacion, ni determinada ni constante, las estensiones de las proyecciones horizontales de dos arcos de curva con sus magnitudes verdaderas. Se percibe fácilmente que una misma proyeccion horizontal puede convenir á una multitud de curvas diferentes; ni aun cuando inversamente nos fijáramos en una curva determinada podriamos decir otra cosa, siendo tan diverso el número de sus proyecciones distintas en curvatura, como posiciones podrian dársele al proyectarla.

Para llegar á un resultado satisfactorio en la representacion de esta clase de líneas, nos vemos en la precision de sustituirlas por polígonos, que supondremos inscritos, y cuyo conjunto de lados se aproxime tanto á ellas cuanto nos sea necesario: de este modo, acotando únicamente los vértices supuestos de los referidos polígonos, podemos atribuir cotas á los puntos intermedios no acotados, pues los arcos de curva comprendidos pueden ser considerados entonces como rectos.

Hemos hecho mencion del polígono inscrito á la curva en el espacio; por lo tanto, es preciso no perder de vista que no basta para definirla acotar únicamente los vértices del polígono inscrito á la proyeccion horizontal, sino que es preciso anotar tambien en sus lados los puntos que resulten ser proyecciones de los vértices del polígono inscrito á la proyeccion vertical de la curva, para tener espresados en ambos sentidos sus cambios de curvatura.

La proyeccion (AB) será la de una curva de doble curvatura; el conjunto de sus cotas la dará completamente á conocer. Fig. 14.

La proyeccion (CD) pertenece á una hélice trazada en una superficie cilíndrica de revolucion, cuya línea, aunque de doble curvatura, permite, por su naturaleza, sujetar á una ley uniforme, y por consiguiente á escala, la progresion de sus cotas. Fig. 15.

Fig. 16. Si la curva estuviese en un plano vertical, ninguna dificultad ofreceria tampoco su espresion: la traza del plano seria su proyeccion, y las desiguales amplitudes que separan las cotas que se diferencian en la unidad la darán suficientemente á conocer, evitando sea confundida con las líneas rectas, en las que estas distancias son iguales.

Fig. 17. Cuando estas curvas sean cerradas, su doble acotacion vendrá á espresar su naturaleza.

Fig. 18. Cuando dos líneas curvas existan en un mismo plano vertical, se acentuarán las cotas relativas á una de ellas para manifestar su existencia.

Fig. 19. De igual signo se usará para distinguir en semejante caso, y desde luego, una recta dada por dos de sus puntos de una curva con una misma proyeccion.

Fig. 20. Una línea curva plana inclinada será dada á conocer por la sola acotacion de tres de sus puntos, que bastan para determinar el plano en que está situada.

Fig. 21. Cuando la curva exista en un plano horizontal, bastará para definirla su proyeccion anotada con una sola cota, que será la del plano que la contiene.

SUPERFICIES EN GENERAL.

El método general que hemos descrito para la representacion de una superficie cualquiera, está sujeto en ciertos casos á modificaciones importantes, que sin embargo no lo alteran en su esencia.

Las superficies se subdividen en dos grandes secciones diferentes; aquellas que, estando sujetas á una ley de generacion constante, pueden ser definidas con el auxilio únicamente de algunas de sus líneas, y las que no estan en este caso. En el primer supuesto, podemos dispensarnos de trazar las líneas intersecciones del sistema de planos

horizontales con las superficies, porque pueden hacerse depender de otras que las envuelven implícitamente, proporcionándonos ademas todas las cotas de la superficie con datos mas sencillos.

Al efecto siempre que tratemos de representar una superficie sujeta á una ley de generacion constante, lo haremos por medio de su generatriz y directriz acotadas.

PLANOS INDEFINIDOS.

Si fuese un plano la superficie que tratásemos de espresar, una sola recta seria suficiente para determinarlo, eligiendo por directriz y generatriz de él sus líneas de máxima y mínima pendiente. Sabemos que estas líneas tienen la propiedad de ser recíprocamente perpendiculares, y proyectarse del mismo modo, por ser ademas horizontal una de ellas. Construyendo, pues, únicamente la escala de la referida línea de máxima pendiente del plano, quedará completamente definido. Podemos, en efecto, designar con este dato en un plano todos los puntos que tienen una cota dada, pues estarán en la perpendicular á la escala que pase por su punto de igual cota; é inversamente dada la proyeccion de un punto una perpendicular tirada desde él á la referida escala, nos indicará en ella la cota que le pertenece.

Sea (A B) la proyeccion horizontal de la línea de máxima pendiente y directriz de un plano, y (C D) su horizontal generatriz: si construimos la escala (4—10) de aquella línea, nos espresará completamente el plano á que se refiere; por medio de perpendiculares tales como la (F—9) y (E—5,5) nos dará resueltos los problemas inversos anteriores, pudiendo ademas ser consideradas dichas perpendiculares como sus intersecciones con el sis- Lám. 3.ª Fig. 22.

tema general de planos horizontales. Con el objeto de que la recta graduada que represente la escala de pendiente de un plano no pueda ser confundida con la que pertenezca á una recta, se distingue aquella con una doble línea, como representa la figura.

Fácil es convencerse de que un plano representado de este modo no puede confundirse con otro, pues sus escalas de pendiente darán distancias horizontales distintas para la misma diferencia de cotas: tambien se vé que no es preciso que estas escalas tengan una posicion fija, pudiendo ser trasladadas paralelamente á sí mismas á donde convenga para la claridad del dibujo.

Fig. 23. Un plano vertical estará representado por su traza; lo distinguirá el carecer de cotas esta línea.

Fig. 24. Un plano horizontal puede ser espresado en el dibujo por una escala anotada con dos cotas iguales; cuando esto suceda, puesto que sus líneas de máxima y mínima pendiente en este caso pueden ser dos líneas cualesquiera trazadas en el plano, es menester no perder de vista que tendrán infinidad de posiciones la una respecto de la otra, debiéndose elegir la conveniente; ó mas bien que este medio no es otra cosa sino manifestar gráficamente en el dibujo la existencia de un plano, que no podia ser dado á conocer sino en el enunciado del problema.

Nos hemos referido en lo que llevamos espuesto á la línea de máxima pendiente de un plano, como si esta nos fuese dada de antemano: realmente las líneas que debemos suponer conocidas, son las horizontales del plano, por resultar inmediatamente de los datos que lo determinan, cualesquiera que estos sean; sin embargo, la dependencia que tienen entre sí estas líneas nos permite suponerlas á ambas conocidas desde luego. No debemos creer por esto que, dado un plano por datos que basten á determinarlo, hemos de proceder inmediatamente á cons-

truir su escala de pendiente; esto será necesario cuando tengamos que considerarlos de una manera indefinida; pero no cuando los supongamos limitados por líneas conocidas. Tal sucede en las caras de una pirámide, un prisma, y en general de una superficie terminada por planos.

SUPERFICIES CURVAS REGLADAS.

Una superficie cónica estará definida por su curva directriz y la proyeccion acotada de su vértice: con estos datos, dada la proyeccion de uno cualquiera de sus puntos, podemos asignarle la cota que le corresponda, haciendo pasar por él la generatriz que lo comprende; del mismo modo nos es fácil designar los puntos que tengan una cota dada en la superficie, uniendo por una curva los de igual cota en todas las generatrices. En efecto, sea (ACD) la curva directriz y (11) el vértice de una superficie cónica: dado el punto (B) perteneciente á ella, podemos asignarle la cota (8) que le corresponde, pues será la misma que le pertenezca en la generatriz (5—11) que lo comprende, y la cual está completamente determinada por conocerse dos de sus cotas. Igualmente, si se nos pidiese fijar los puntos de la superficie que tuviesen la cota (16), por ejemplo, hallariamos los puntos de las generatrices que tuviesen la espresada cota y solo nos restaria unirlos por una curva continua. Fig. 25.

Se creerá embarazoso á primera vista el llegar á los resultados que hemos indicado, pues parece exigen la construccion de tantas escalas de pendiente como generatrices nos sea necesario emplear; sin embargo, notando que cada dos de ellas existen en el mismo plano, construida en una su escala de pendiente y valiéndose de las propiedades de las líneas proporcionales, podemos obtener las

cotas de todos los puntos de la superficie sin necesidad de nuevas escalas. Debemos, pues, en rigor, concluir que una superficie cónica no estará realmente determinada sino cuando, ademas de tener su curva directriz y la proyeccion acotada de su vértice, hayamos construido la escala de pendiente de una de sus generatrices. La referida escala apoyada en el punto y curva directrices, espresará suficientemente que estos datos pertenecen á una superficie.

Fig. 26. De un modo análogo puede ser definida una superficie cilíndrica, piramidal ó prismática, y en general toda superficie desarrollable.

Fig. 27. Tampoco puede ofrecer dificultad la espresion de una
Fig. 28. superficie gaucha cualquiera, la S, indicará una superficie de esta naturaleza, cuyas directrices son rectilíneas, y cuyo plano director es inclinado al horizonte: la S', difiere en tener curva una de sus directrices, y en permanecer sus generatrices constantemente paralelas al plano de comparacion.

SUPERFICIES CURVAS EN TODOS SENTIDOS.

Cuando se trate de espresar una superficie de revolucion, cuyo eje de rotacion sea perpendicular al plano de comparacion, su curva generatriz acotada vendrá á ser la verdadera escala de curvatura de la superficie, proporcionándonos el conocimiento de las cotas de todos sus puntos por medio de las secciones horizontales que los envuelven, y cuyas líneas nos será fácil trazar, por ser circunferencias de centro y rádio conocidos.

La relacion constante y conocida entre los ejes de un elipsoide nos dará á conocer, cualquiera que sea su posicion, las cotas diferentes de sus puntos, pues nos sumi-

nistra los medios de trazar las secciones horizontales que los comprenden; en un caso análogo estarán las superficies de revolucion, cuyo eje de rotacion sea inclinado con respecto al plano de comparacion.

SUPERFICIES IRREGULARES.

Los ejemplos que preceden nos manifiestan claramente que ningun género de duda ni complicacion nos presenta la espresion gráfica, en un solo plano de proyeccion, de una superfície sujeta á una ley de generacion constante, cualquiera que sea la forma bajo la que esta se nos presente; veamos ahora cómo podemos traer al mismo resultado las superficies que no estan en este caso.

Este último supuesto es el único que no admite ninguna clase de modificacion en el sistema general de representacion que hemos descrito al principio: no es posible adoptar otro medio mas sencillo para la espresion de una superficie de este género, que el de suponerla realmente cortada por una série de planos equidistantes paralelos al de comparacion, y proyectar acotadas las curvas de interseccion que nos resulten.

Si nos fuese posible trazar estas secciones de modo que estuviesen infinitamente próximas, ninguna parte de la superficie se escaparia á nuestra investigacion; pero no pudiendo esto ser, tendremos que contentarnos con medios mas ó menos aproximados de llegar á este resultado.

El mas sencillo y el que se ocurre desde luego, es el de suponer los planos horizontales que cortan la superficie lo suficientemente próximos unos á otros, para que las zonas irregulares comprendidas entre las curvas intersecciones puedan ser sustituidas por superficies de generacion

conocida, que se aproximen á la verdadera hasta el punto que nos sea necesario.

El mismo método que ha presidido á la determinacion de una curva cualquiera; la misma idea generalizada.

Lám. 1. Fig. 29. La condicion á que queremos sujetar las zonas parece que escluye, lo mismo que en las curvas, la equidistancia de los planos que causan las secciones; supuesta esta, careceriamos en la descripcion de la superficie de muchas partes notables de ella, que podian mirarse como intermedias á las secciones equidistantes. Tal sucederia en sentido horizontal con la parte (AB) comprendida entre las curvas 7 y 8; lo único que podremos decir es, que la superficie pasa de cóncava á convexa en el intervalo de esta zona, pero nada nos dará á conocer con certeza la línea segun la cual se verifica este cambio de curvatura, si no está fijada de antemano; inútil seria sin este dato tratar de sustituir satisfactoriamente por otra la superficie de la zona. En un caso análogo nos encontrariamos, si presentase la superficie una arista, como la (C D E) en sentido transversal á sus curvas horizontales.

Parece, pues, preciso, en donde estas particularidades se verifiquen, multiplicar las secciones hasta tanto que nos den una idea distinta del carácter de la superficie.

Sin embargo, lo embarazoso que esto seria, y la necesidad ademas que tenemos de conservar la equidistancia de los planos que causan las secciones en la superficie para juzgar desde luego de sus diferentes curvaturas, como veremos mas adelante cuando tratemos de los planos tangentes, hace que adoptemos, para evitar estos inconvenientes, el medio de suponer directamente trazadas en el dibujo las líneas notables de la superficie á que hemos hecho referencia.

La superficie mas sencilla que podemos emplear para llenar el objeto de sustituir aproximadamente las zonas, y

que por lo mismo adoptaremos desde luego, es una reglada cuyas generatrices se apoyen á un tiempo en las dos curvas que determinan la zona, siendo ademas normales á una de ellas. De esta manera, dada la proyeccion de un punto cualquiera perteneciente á una superficie y situado entre dos de sus curvas horizontales, podemos asignarle la cota que le corresponde, haciendo pasar por él la generatriz acotada que lo comprende. Del mismo modo podemos fijar los puntos de una misma cota comprendidos en una zona, intercalando entre las secciones que la terminan diferentes curvas que unan los puntos de una cota igual en todas las generatrices.

La determinacion de las espresadas generatrices no puede ofrecer dificultades: siendo horizontales las curvas directrices, sus tangentes serán paralelas al plano de proyeccion; suponiendo que las generatrices se sujeten á la condicion de ser normales á la directriz superior, se proyectarán en sentido perpendicular á sus tangentes, y para hacerlas apoyarse en la directriz inferior bastará atribuirle al punto de interseccion de ambas líneas la cota que á esta última directriz le corresponde.

Suceden, sin embargo, casos en que la superficie así determinada difiere mucho de la verdadera que sustituye, por la inflexion caprichosa de las curvas. Tal se verifica con la que engendrarian las normales á la parte cóncava (A B) de una curva; la superficie que resultase bajo los anteriores supuestos, de ningun modo se adaptaria á la verdadera; pero nada mas sencillo que obviar este inconveniente con un ligero cambio de generacion: supóngase á partir del punto (A), en que la normal lo es próximamente á las dos curvas, que aquella no sigue siéndolo á la superior sino que pasa á serlo á la inferior, apoyándose en aquella; de este modo, en vez de sustituir la zona por una sola superficie, lo estará por dos; pero que estan- Fig. 30.

do tangencialmente unidas pueden mirarse como una misma, la cual se aproxima cuanto deseamos á la verdadera.

A pesar de todo, los resultados que obtengamos bajo estos supuestos no serán geométricamente exactos, y menos si se repara en que siendo irregulares, esto es, no sujetas á una ley de continuacion las curvas de interseccion de la superficie, no pueden ser trazadas sino de un modo aproximado: pero esto no trae inconvenientes si las operaciones gráficas necesarias se ejecutan con cuidado. Como el objeto principal del sistema de acotaciones que nos ocupa es las aplicaciones á la práctica, ningun error se seguirá de estas inexactitudes geométricas, por no ser perceptibles ni posible por su pequeñez el apreciar sus diferencias reales.

La superficie de sustitucion que resulte por los procedimientos que hemos indicado será, hablando en general, una superficie gaucha, puesto que no siendo por lo regular paralelas las curvas que determinan las zonas, las normales á una de ellas cortará con alguna oblicuidad á la otra, y por lo tanto las tangentes en los puntos de interseccion no serán paralelas, ni planos por consiguiente los elementos superficiales que determinen: solo cuando se verifique que las normales lo sean á un tiempo á ambas curvas, la superficie engendrada será desarrollable.

Fig. 31. Solo nos resta una observacion que hacer, y es que siendo las curvas determinadas en las superficies que nos ocupan, sus líneas horizontales de curvatura y constantemente normales á ellas las generatrices de las superficies parciales de las zonas que sustituyen la total, la reunion sucesiva de ellas vendria á dar por resultado las líneas de curvatura (AB) en sentido de su máxima pendiente; definiendo gráfica y geométricamente la superficie los dos sistemas de líneas de una manera completa.

Sentados estos preliminares, pasaremos á resolver al-

gunos problemas relativos á la parte que nos ha ocupado hasta aquí, los que, sirviéndonos de precedentes y familiarizándonos con el sistema de acotaciones, nos pondrán en el caso de marchar sin dificultad en adelante.

PROBLEMAS.

1.° Dados dos puntos por su proyeccion y su cota, hallar la verdadera magnitud del trozo de recta que comprende. Lám. 5.ª Fig. 32.

Sean (A y B) los puntos dados; la magnitud pedida será la hipotenusa del triángulo rectángulo (ABB′) proyectado en (AB) cuyos catetos son la distancia horizontal que separa los dos puntos, y que puede ser valuada numéricamente por medio de la escala del dibujo, y la espresada por la diferencia de cotas; tendremos, pues, que $L=\sqrt{h^2+d^2}$ y en el caso presente $L=\sqrt{25}=5$.

La ecuacion $L^2=h^2+d^2$ da lugar á la resolucion de otros dos problemas semejantes, suponiendo sucesivamente desconocidas las (h) y (d).

2.° Dada una recta por su proyeccion y las cotas de dos de sus puntos, determinar el ángulo que forma con el plano de comparacion. Fig. 32.

Se entiende aquí por ángulo la espresion de la tangente trigonométrica, ó bien la relacion numérica entre la distancia horizontal y vertical que separa dos puntos de la línea; esto supuesto sea la (AB) la recta dada, como $tang.=\frac{sen}{cos}$, tendremos en el caso presente que $tang.=\frac{4}{3}$

Si se tratase de un plano en nada diferiria el problema, puesto que el ángulo que forma con el de comparacion es igual al que forman con él sus líneas de máxima pendiente.

Fig. 32. 3.° Inversamente, si por un punto tal como el (A) se nos pidiese tirar una recta de una inclinacion dada $\left(\frac{m}{n}\right)$ el problema estaria reducido á construir una superficie cónica de revolucion, cuyo vértice estuviese en el punto dado, y cuyas generatrices formasen con el plano de comparacion el ángulo pedido.

Para llegar á este resultado, elegiremos un plano horizontal que diste (m) unidades de la escala del dibujo del punto propuesto, y sobre él, desde la proyeccion del punto (A) como centro, describiremos una circunferencia (C′D′) cuyo rádio sea (n), la cual será la traza del cono buscado con el espresado plano horizontal. Ahora, cuantas rectas hagamos pasar por el punto propuesto, nos darán otras tantas soluciones del problema con sólo atribuirles en el punto de interseccion con la espresada circunferencia la cota (m) que á esta corresponde,

Cuando el ángulo dado se aproxime á un recto, será preciso para construir con precision la traza del cono, elegir el plano horizontal á una distancia tal que el rádio de la seccion resulte de una magnitud conveniente, lo cual seria lo mismo que suponer multiplicado por un número cualquiera el quebrado que espresa la tangente del ángulo.

4.° Dada una recta y un punto, hacer pasar por este una paralela á la primera.

Fig. 33. Sea (AB) la recta y (C) el punto dado: debiendo ser paralelas las rectas, sus proyecciones lo serán tambien; tirando, pues, por el punto (C) una paralela á la (AB), tendremos la proyeccion de la recta buscada: para acotarla, observaremos que debe tener la misma inclinacion que la conocida; tomando, pues, á partir del punto (C), distancias iguales á la (AB) obtendremos puntos cuyas cotas diferirán sucesivamente las mismas unidades que las de los (A) y (B) propuestos.

El procedimiento inverso nos daria á conocer si dos rectas eran paralelas cuando sus proyecciones lo fuesen.

En nada se hubiese diferenciado la solucion del problema, si en él nos hubiésemos referido á dos planos.

5.° Por tres puntos dados que no estén en línea recta, hacer pasar un plano: ó bien construir la escala de pendiente de un plano, que pase por tres puntos conocidos.

Sean los puntos dados los (A, B y C); si unimos dos de ellos por dos rectas (AB) y (AC), estas deberán estar en el plano buscado, y podrán ser acotadas, pues conocemos dos puntos en cada una de ellas; si tiramos la recta (DE), pertenecerá igualmente al mismo plano, siendo ademas una de sus horizontales; la escala de pendiente que tratamos de determinar, será perpendicular á esta recta, y tendrá la misma cota que ella en el punto donde la corte: resta, pues, únicamente, el tener otra cota para la misma escala, que será dada por otra horizontal que se haga pasar por uno de los puntos conocidos; tenemos, pues, en la escala (FG) el plano que buscamos. Fig. 35.

La solucion se hubiera simplificado, si dos de los puntos propuestos hubiesen tenido igual cota.

Una solucion análoga dariamos al problema de hacer pasar un plano por un punto y una recta, por dos rectas que se cortan, ó por dos rectas paralelas.

Sin embargo, no siempre en la práctica, dado un plano por elementos que basten á constituirlo, se procede á la determinacion de su escala de pendiente; tal sucederá cuando no haya necesidad de considerar los planos de una manera indefinida, y estén limitados en todo ó en parte por líneas acotadas cualesquiera: las horizontales, que nos es posible tirar en este caso, pueden bastarnos á responder á las cuestiones que se nos ofrezcan, sin necesidad de proceder á la construccion de una escala de pendiente que vendria á sernos inútil: en lo sucesivo tendre-

mos ocasion de convencernos de la verdad de estas observaciones.

Lám. 5.ª Fig. 35. 6.° Fundándonos en el problema que acabamos de resolver, adoptamos en otro lugar, para caracterizar una curva plana inclinada, el medio de darla á conocer por la sola acotacion de tres de sus puntos: ninguna dificultad ofrecerá en efecto el designar todas sus cotas, despues de construir la escala de pendiente del plano que pase por los tres puntos conocidos.

Fig. 36. 7.° Por un punto hacer pasar un plano paralelo á una recta dada, ó á la inversa.

Este problema es indeterminado; en efecto, haciendo pasar por el punto dado una recta paralela á la propuesta, cuantos planos pasen por ella responderán al enunciado.

Si fuesen la (AB) y (C) la recta y punto propuestos, tirariamos por este la paralela (CD) á aquella, y haciendo pasar por los puntos (C y D) dos horizontales en una direccion cualquiera, el plano (C′ D′) que determinen dará una solucion del problema.

Fig. 37. 8.° Dadas dos rectas, hacer pasar por ellas dos planos paralelos.

Sean las dos rectas las (AB) y (A′ B′); por un punto cualquiera (A) de la primera tírese una paralela á la segunda, haciendo lo mismo recíprocamente por un punto tal como el (B′) de esta: el problema se habrá reducido al de hacer pasar un plano por dos rectas que se cortan: las escalas (CD) y (C′ D′) serán las de los planos pedidos.

9.° Por un punto tomado en una recta, tirarle una perpendicular que esté comprendida en su plano proyectante.

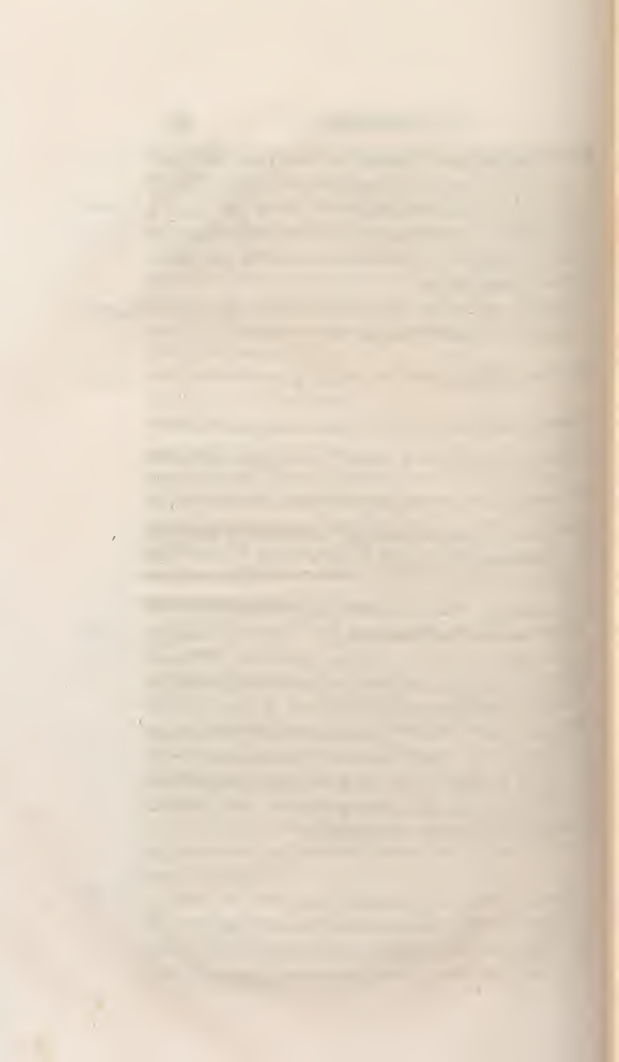
Fig. 38. Para resolver este problema observaremos que las proyecciones de estas líneas se confundirán en una misma recta, y que la progresion ascendente de sus cotas estará dirigida en sentido inverso, cualesquiera que estas sean.

Sabemos ademas que si unimos por una recta dos puntos (A) y (B) de dos líneas perpendiculares (AC) y (CB), el ángulo en (A) es complemento del (B), ó lo que viene á ser lo mismo, que el ángulo que la recta dada forma con el plano de comparacion es complemento del que forma con él su perpendicular.

Esto supuesto, siendo (A′ C′) la recta dada y (D) el punto por el que se le quiere levantar la perpendicular, como Fig. 38′.

tang. $A' = \frac{\text{sen. } A'}{\text{cos. } A'}$ y cot. $A' = \frac{\text{cos. } A'}{\text{sen. } A'}$, siendo en el caso presente tang. $A' = \frac{m}{n} = \frac{3}{5}$, lo único que tendremos que hacer será tirar por el punto (D′) una recta cuya tangente sea $\frac{5}{3}$, lo que es lo mismo que decir que á (3) unidades de la escala de distancia horizontal le debemos dar (5) de diferencia de cotas: la (C″ B″) será pues la recta buscada.

Una solucion idéntica dariamos al problema de tirar á una recta un plano perpendicular por un punto tomado en ella. En efecto, la línea de máxima pendiente del plano buscado que pasase por el punto, se proyectaria segun la recta dada, siéndole perpendicular en su plano comun proyectante, por lo cual el problema tendria las mismas circunstancias. En igual caso nos encontrariamos si el punto por el que deben pasar la recta ó plano perpendiculares estuviera fuera de la recta propuesta, pero sin variar las otras condiciones del problema.



CAPITULO III.

INTERSECCION DE SUPERFICIES.

PLANOS.

Sabemos que un punto de la recta, segun la cual se cortan dos planos, está dado por la interseccion de dos rectas que existan respectivamente en cada uno de ellos.

Esto supuesto, dados dos planos por sus escalas de pendiente, trazaremos en ellos dos horizontales de igual cota, y su punto de encuentro será uno de la interseccion que buscamos; para acabar de determinarla, hallaremos otro punto usando del mismo procedimiento.

Sean (AB) y (A′ B′) los planos dados, la (A″ B″) será la recta segun la cual se encuentran mútuamente. Lám. 6. Fig. 39.

Sin embargo, puede ocurrir el caso de que las escalas de dos planos sean paralelas, en el cual las horizontales no llegarán á encontrarse, ó bien que estas se corten fuera del papel por ser aquellas poco convergentes; en estas circunstancias apelaremos al medio general de cortar los planos por un tercero arbitrario, cuyas horizontales no ofrezcan este inconveniente con respecto á los propuestos. Fig. 40.

Suele ocurrir en la práctica el investigar si dos planos supuestos limitados por su comun interseccion tienen su ángulo vuelto hácia el plano de comparacion ó á la inversa, esto es, si forman *arista* ó *gotera*.

Nada mas fácil que dar solucion á este problema suponiendo ambos planos cortados por otro vertical (MN) perpendicular, por ejemplo, á la comun interseccion de ambos.

Fig. 41, 41′ y 41″ Suponiendo abatido este perfil sobre un plano horizontal como en la figura 41, ó bien por solo la observacion de la série que siguen las cotas de la interseccion (MN) como en las figuras (41′) y (41″), vendremos en conocimiento de si la (A″ B″) es una arista ó es una gotera. En efecto, si la cota perteneciente en el perfil (MN) á la interseccion (A″ B″) fuese la mas alta, decreciendo despues á un lado y otro, los planos propuestos formarán arista, y por consiguiente gotera en el caso contrario.

Fig. 41′. Sin embargo, como esta sucesion de cotas no podrá tener lugar (fig. 41′) sino en el caso en que el ángulo de las horizontales esté vuelto hácia la parte ascendente de la recta interseccion (A″ B″), podemos deducir que dos planos formarán arista cuando el ángulo que formen sus horizontales esté vuelto hácia la parte ascendente de su comun interseccion, ó bien cuando el ángulo de las escalas esté vuelto hácia la parte descendente de la interseccion y las graduaciones decrezcan en el mismo sentido, y gotera en el caso contrario.

Si las escalas fuesen paralelas formarán arista ó gotera los planos, segun sus cotas decrezcan ó aumenten á partir de la comun interseccion.

El problema que hemos resuelto en la fig. 39 nos suministra el medio de hallar el punto de encuentro de una recta y un plano.

Fig. 42. Supongamos que el (AB) sea el plano propuesto y (CD) la recta; si hacemos pasar por esta un plano cualquiera cuyas horizontales sean las (C) y (D) por ejemplo, cortará al propuesto segun la recta (EF), cuya proyeccion nos dará

en su punto de encuentro con la (CD), el punto (G) que buscamos.

Del mismo problema podemos hacer depender la investigacion de si se encuentran dos rectas cuyas proyecciones se corten. Para que dos rectas se corten en el espacio, es preciso que el punto de encuentro de sus proyecciones dé una misma cota para ambas; generalmente este punto no será de los acotados de las rectas, y menos si estuviesen dadas por dos solos de sus puntos; pero haciendo pasar un plano arbitrario por cada una de ellas, y hallando la interseccion comun de ambos, ésta nos dirá si las rectas propuestas se cortan ó si esto no se verifica, pues en el primer caso deberá pasar por el punto de encuentro de sus proyecciones. Fig. 43.

Si las dos rectas propuestas existiesen en un mismo plano vertical, la proyeccion de la interseccion de los planos que pasasen por ellas, ó bien seria paralela ó convergente á su comun proyeccion; la primera circunstancia nos indicaria que las rectas dadas eran paralelas, y la segunda que se cortaban fuera del papel, si no estaba comprendido en él el punto de encuentro de la proyeccion de las rectas y de la interseccion de los planos. Fig. 44.

SECCIONES PLANAS DE LAS SUPERFICIES CURVAS.

SUPERFICIES CURVAS REGLADAS.

En general la interseccion de dos superficies se encontrará suponiéndolas cortadas por una série de planos cualesquiera, y uniendo los puntos en que las líneas pertenecientes en ambas, á una misma seccion, se encuentren mútuamente: el sistema de planos secantes variará, en cada caso particular, segun las ventajas que una posicion determinada nos ofrezca.

Las intersecciones de una superficie con planos verticales ú horizontales no puede ofrecer dificultades, pues las primeras se reducen á atribuir á la traza del plano secante las cotas pertenecientes á los puntos de la superficie que se proyecten en ella, y las segundas resultan fácilmente de los datos, estando en ellos implícitamente contenidas.

Dividiremos las superficies en dos secciones; las regladas y las que no estan en este caso.

Parece que el sistema de planos mas ventajoso que podemos elegir para llegar á nuestro objeto es el que nos presenta la misma série de planos horizontales que nos ha servido para establecer las proyecciones.

Sin embargo, en las superficies contenidas en la primera seccion enunciada, sujetas todas á una ley fija de generacion, y definidas por consiguiente por sus directrices y generatrices acotadas, nos seria preciso, siguiendo el método general, empezar por construir una série de secciones inútiles á nuestro objeto para llegar á obtener la única que necesitamos.

Para evitar estos inconvenientes, ya que el sistema de proyeccion que nos ocupa nos proporciona un modo tan sencillo de encontrar la interseccion de una recta y un plano, nos valdremos ventajosamente de este procedimiento para determinar las secciones planas de las espresadas superficies sin pasar por aquella operacion intermedia.

Al efecto siempre que tratemos de construir la interseccion de un plano con una superficie reglada, haremos pasar, para obtener un punto de ella, un plano cualquiera por una de sus generatrices; hallaremos su recta interseccion con el propuesto, y el punto de encuentro de estas dos últimas líneas nos dará la solucion que buscamos.

Lám. 7. Sea, por ejemplo, la superficie cónica dada por la curva

(ABCD) y el vértice (V), y (CD) el plano cuya mútua interseccion queremos encontrar; trazaremos en el plano dos de sus horizontales (C) y (D), y haremos pasar por los puntos (C′) y (D′) de una generatriz cualquiera (C′ D′) dos paralelas que podremos mirar como horizontales del plano arbitrario que pasa por ella; este sistema de líneas nos dará desde luego la recta (C″ D″) de interseccion de este último plano con el propuesto: el punto (E) será pues uno de la seccion que buscamos; lo mismo podemos obtener los restantes. En este caso particular admite una gran modificacion el problema, eligiendo para tirar una de las horizontales del plano dado el punto (F) de su escala, cuya cota es igual á la del vértice de la superficie, y haciendo que las horizontales de los planos arbitrarios que pasan por las diferentes generatrices sean todas paralelas, pues entonces deben pasar por un mismo punto (F) todas las intersecciones.

La figura 46 se refiere á una pirámide. Fig. 46.

El problema anterior nos suministra el medio de trazar por un punto (C) tomado en un plano (AB) una recta cuya inclinacion sea $\frac{m}{n}$. Fig. 47.

Para esto concibamos que la circunferencia (DE) sea la traza horizontal de una superficie cónica, cuyas generatrices formen con el plano de comparacion el ángulo pedido, y cuyo vértice esté en el punto dado; trazando ahora la horizontal (A) del plano propuesto, contenida en el plano de la base del cono, nos dará dos puntos (D) y (E) en la circunferencia, tales que las generatrices que pasen por ellos cumplirán con las condiciones del problema, pues vienen á ser la interseccion de la superficie cónica con el plano espresado. No hubiéramos hallado sino una solucion si el ángulo exigido hubiera sido igual al del plano, y ninguna si hubiese sido mayor.

La solucion que hemos dado á este último problema envuelve tambien la del siguiente.

13. A partir de un punto tomado en una superficie dada por curvas de nivel, trazar una línea cuyos elementos formen con el plano de comparacion un ángulo constante y dado.

Lám. 8. Fig. 48. Sea (A) el punto de partida; si lo miramos como vértice de una superficie cónica de revolucion cuyas generatrices tengan la inclinacion pedida y hallamos su interseccion con el plano horizontal de la curva inmediatamente inferior (9) los puntos (*a*) de interseccion nos darán dos rectas (*Aa*) que formarán con el plano de comparacion el ángulo dado. Una construccion análoga aplicada á partir de los puntos (*a*) nos dará otros trozos de recta en iguales circunstancias, y continuando sucesivamente la misma operacion llegaremos á obtener un conjunto de rectas continuas, que responderán aproximadamente al problema.

Para que la solucion fuese rigorosa seria necesario ó que las secciones de nivel estubiesen infinitamente próximas, en cuyo caso las porciones (*Aa*) de recta pertenecerian á la superficie, ó bien que se verificase fortuitamente esto mismo aun cuando estubiesen espaciadas las curvas referidas; en efecto las líneas (*Aa*) que hemos trazado son las intersecciones con la superficie cónica (*Aa*) de un plano que pasa por los puntos (*aa*) y por su vértice, las cuales solo existirán tambien en la superficie propuesta en el caso particular, aunque raro, de ser planos en la direccion (*Aa*) sus elementos. De modo que la solucion que hemos propuesto será en general inexacta cuando las curvas de la superficie estén muy espaciadas, pero podemos aproximarnos con la misma construccion al resultado verdadero cuanto nos sea necesario, intercalando nuevas curvas entre las propuestas de la superficie.

La solucion no será posible en todos los puntos, por-

que puede suceder que la base del cono no corte á la curva inmediata, asi como solo dará una solucion cuando resulte tangente.

El problema será ademas indeterminado, en general, á no ser que se añada la condicion de evitar los puntos de retroceso ó se la asigne una cierta direccion á la curva, ó lo que es lo mismo, se la sujete á aproximarse lo mas posible á puntos dados, como en la traza de los canales y caminos.

SUPERFICIES CURVAS EN TODOS SENTIDOS.

No será menos sencillo que en los casos que hemos considerado, el encontrar las secciones planas de una superficie cuyas generatrices y directrices sean líneas curvas, ó bien cuando salgamos del cuadro trazado anteriormente, si se esceptúan las superficies de revolucion cuyo eje no pueda ser elegido en una posicion conveniente, pues entonces no es posible prescindir de determinar, como asi mismo en el elipsoide, sus secciones horizontales ú otras que las sustituyan.

Si se tratase de una superficie de revolucion recta deberiamos mirar como trazadas sus secciones horizontales puesto que son circunferencias de centro y rádio conocidos, siendo sus generatrices escalas curvas de las espresadas secciones: con estos datos solo nos restaria para llegar á nuestro objeto, marcar los puntos de encuentro de las horizontales del plano propuesto y paralelos de la superficie que tuviesen igual cota, y unirlos por una línea continua.

Mas facilidad envolverá la investigacion de la curva interseccion de un plano con una superficie irregular cual-

quiera estando estas dadas por sus secciones de nivel acotadas.

Fig. 49. Puede ocurrir sin embargo que la interseccion quede terminada en una curva de nivel por serle tangente la horizontal correspondiente, ó bien que termine entre dos curvas por pasar entre ellas la horizontal del plano que debia dar los puntos de interseccion con la última curva: en este caso trazaremos las generatrices de la zona en el sitio presumible de la seccion, hallaremos los puntos de encuentro de estas líneas con el plano dado, y tendremos los puntos de la seccion superiores á la última curva encontrada por las horizontales del plano que la causa.

Fig. 50. Del mismo modo podemos hallar la interseccion de un plano, cuando ninguna de sus horizontales encuentra las curvas de nivel de la superficie. Tal puede suceder cuando las espresadas curvas esten bastante separadas y la pendiente del plano se aproxime á la vertical.

Inútil parece advertir que en la determinacion de las secciones planas de esta clase de superficies, es menester tener sumo cuidado con distinguir los puntos de entrada y de salida en la superficie de las horizontales de los planos, no estando sujetas á ley de continuidad la forma de sus intersecciones, y pudiendo ademas componerse de diferentes ramas.

Los problemas anteriores nos suministran los medios de hallar el punto de encuentro de una recta con una superficie, haciendo pasar por aquella un plano que la corte.

Hemos supuesto en lo que llevamos dicho hasta aquí que los planos que causaban las secciones en las superficies estaban dados por sus escalas de pendiente; pueden no obstante ser dados por datos que basten á la resolucion de las anteriores cuestiones, como hemos hecho observar en otro lugar, sin tener necesidad de construir sus esca-

las indefinidas. Tal sucederia si se nos pidiese hallar la interseccion de una superficie con un plano cuya traza ó inclinacion, en un sentido dado, se señale.

Si fuese, por ejemplo, la traza dada la (CD) perpendicular á las aristas del prisma (AB) y la inclinacion del plano la de 45°, obtendriamos la interseccion con solo marcar en las aristas y á partir de los puntos en que encuentran la traza del plano, distancias (CC′) (DD′) tomadas en la escala del dibujo é iguales á las alturas que las espresadas aristas tienen sobre la traza. Lám. 7. Fig. 51.

Sin embargo, aun refiriéndonos á la misma superficie horizontal, si la traza no fuese perpendicular á las aristas, no podriamos tomar como en el caso anterior, sobre ellas, la relacion, con referencia á la escala del dibujo, entre la base y altura espresada por la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el horizontal el plano dado, por no proyectarse segun dichas aristas: pero tirándole á la traza (EF) por un punto cualquiera (F) una perpendicular podemos marcar en ella puntos que tengan la referida relacion con lo cual la interseccion que buscamos será obtenida fácilmente.

INTERSECCIONES DE SUPERFICIES CURVAS.

Despues de lo espuesto ninguna dificultad envolverá el problema de hallar la comun interseccion de dos superficies cualesquiera; en lo único que habrá que poner atencion, es en elegir el sistema de planos secantes que necesitamos emplear para llegar á nuestro objeto, de modo que nos produzca en las superficies propuestas las secciones mas sencillas.

Cuando las superficies dadas sean cónicas sabemos que los referidos planos deben pasar por la recta que una sus

vértices por causar en ellas secciones rectilíneas, y que por la misma razon cuando se trate de dos cilindros los mismos planos deberán ser paralelos á un tiempo á las generatrices de ambas superficies, y en general que cuando las superficies propuestas sean regladas ó bien lo sea una de ellas podemos cuando menos obtener que la seccion en una sea una recta, haciendo pasar los planos por las generatrices de aquella que se preste á esta condicion.

Lám. 8. Fig. 52. Sea por ejemplio la interseccion que nos proponemos encontrar la de las superficies (S) y (S′), la una reglada y la otra irregular. Trazaremos una de las generatrices (AB) de la (S), haremos pasar por ella un plano arbitrario cuya interseccion con la superficie (S′) sea la (CD), y el punto (E) será uno de la interseccion que buscamos; del mismo modo podemos obtener los restantes.

Fig. 53. Por medio del problema general que nos ocupa podemos determinar el punto de encuentro de una curva (AB) y una superficie (S).

Miraremos la curva como directriz de una superficie cualquiera, un cilindro horizontal por ejemplo, hallaremos su interseccion (CDF) con la dada y el punto (D) de encuentro con la proyeccion de la curva nos dará el que deseamos.

Fig. 48. Si se tratase de hallar la interseccion de dos superficies (S) y (S′) dadas por sus curvas de nivel, estaria reducido á unir por una línea continua (AB) los puntos de encuentro de las secciones que tuviesen la misma cota.

CAPITULO III.

PLANOS TANGENTES A LAS SUPERFICIES.

Sabemos que un plano es tangente en un punto á una superficie, cuando está determinado por las tangentes á dos curvas cualesquiera que lo comprendan trazadas en la superficie, porque este plano contendrá todas sus tangentes en aquel punto, teniendo por consiguiente un elemento comun con ella.

Familiarizados ya con la reduccion á un solo plano de proyeccion de los principios de la Geometría descriptiva, ninguna dificultad se encontrará en tirar planos tangentes á superficies cuya generacion sea conocida, puesto que si el punto de tangencia es dado en la superficie, estará reducido el problema á construir por él dos tangentes por las que haremos pasar el plano, y á concebir superficies ausiliares en el caso de que el punto de contacto con la superficie no esté designado.

El problema de tirar, por ejemplo, á una superficie cónica (V) un plano tangente por un punto (a) tomado en ella, estará reducido á concebir por el punto dado la generatriz correspondiente (AV), y la tangente en este punto (A) á la seccion horizontal que pasa por el mismo seria Lám. 9.
la horizontal á la misma cota del plano buscado: una perpendicular (A′ V′) seria su escala de pendiente, y otra horizontal tirada por el vértice (V) acabaria de determinarlo; cuando este último punto sea el dado, el problema tendrá una infinidad de soluciones. Fig. 54.

Si el punto por el que debia pasar el plano fuese el (B)

tomado fuera del cono, hariamos pasar por él y por el vértice una recta, hallariamos el punto (C) en que encuentra al plano de la base de la superficie y las rectas tiradas desde él y que la fuesen tangentes, nos darian la solucion que buscamos.

Si el plano debiese ser paralelo á una recta dada únicamente, diferiria el problema en que la recta tirada por el vértice deberia ser paralela á la propuesta.

Fig. 55. Si se tratase de un cilindro, la solucion del primer problema seria idéntica: el segundo solo variaria en que la recta tirada por el punto dado seria paralelo á las generatrices, y el tercero en que solo seria posible en casos determinados.

PROBLEMAS.

Los problemas que acabamos de resolver acerca de las superficies cónicas nos suministran los medios de dar solucion á otros varios, de los que vamos á ocuparnos.

Lám. 10. 1.° Por un punto dado (A) hacer pasar un plano de
Fig. 56. inclinacion conocida $\frac{m}{n}$.

Miraremos el punto (A) como vértice de una superficie cónica de revolucion cuyas generatrices formen con el plano de comparacion el ángulo pedido y todos sus planos tangentes, tales como el (A′ C′), cumplirán con las condiciones del problema; para que este sea determinado será preciso fijar ademas la generatriz de contacto.

Fig. 57. 2.° Por un punto (D′) tomado fuera de una recta (AB) tirarle un plano perpendicular.

Debiendo ser la recta y el plano recíprocamente perpendiculares, aquella lo será tambien á todas las rectas trazadas en el plano por su pié, y por consiguiente á las

líneas de máxima y de mínima pendiente que pase por este punto y tambien á sus paralelas; se proyectará pues segun una perpendicular á las horizontales del plano buscado, y las escalas de pendiente de este y de la recta dada resultarán ser paralelas, sus graduaciones crecerán en sentido inverso, y los ángulos que formen con el plano de comparacion deberán ser complementarios.

Tirando pues por el punto (D′) dado una perpendicular á la proyeccion de la recta (AB), obtendremos una horizontal del plano que tratamos de determinar y un punto acotado de su escala; haciendo pasar por el mismo punto (D′) una superficie cónica cuyas generatrices tengan la inclinacion $\frac{n}{m} = \cot. A.$ y sujetando el plano anterior á serle tangente, habremos llegado á la solucion que buscamos. Gráficamente el problema estará reducido á tomar sobre la escala (A″ B″) y á partir del punto (D″) una distancia (D″ B″) igual á (m) unidades de la escala del dibujo, y atribuir al punto (B″) con referencia al (D″) (n) unidades de diferencia de cotas.

Del mismo modo resolveriamos el problema de tirar á un plano una perpendicular por un punto tomado fuera de él: su solucion nos proporcionará el medio de medir la mas corta distancia entre aquel y este último, apreciando la magnitud del trozo de perpendicular comprendido entre el punto dado y el plano.

Tampoco diferiria la solucion si se tratase del mismo problema con relacion á dos rectas dadas, sino en que hariamos pasar antes por una de ellas un plano paralelo á la segunda.

3.° Por un punto trazado arbitrariamente fuera de una recta tirarle una perpendicular. Fig. 58.

Haremos pasar por el punto (C) propuesto un plano perpendicular á la recta dada (AB), hallaremos su pun-

to (D) de encuentro, y la recta (CD) será la que buscamos.

Igual solucion dariamos al problema de hallar la mas corta distancia entre un punto y una recta.

4.° Hallar el ángulo que forman dos rectas que se cortan.

Fig. 59. Sean las (AB) y (CD) las propuestas, tomaremos un punto (C) en una de ellas y tiraremos por él un plano (EF) perpendicular á la otra: hallando su punto (E′) de encuentro, la recta (E′ C) será una perpendicular á la (AB), y determinando la verdadera magnitud numérica de las rectas (E′ C) y (E′ D′), tendremos los datos suficientes para obtener el valor de la tangente trigonométrica del ángulo que buscamos.

La solucion anterior no deja de ser embarazosa; la hemos dado á conocer con el objeto de hacer ver que nos es posible resolver toda clase de cuestiones sin el ausilio del plano vertical de proyeccion ni de abatimientos: sin embargo, en este caso particular se vé que el problema hubiera sido mas fácilmente resuelto cortando las rectas propuestas por una horizontal (6–6), y abatiendo sobre su plano el triángulo (6 D′ 6), cuyo ángulo en (D′) es el que buscamos,

De un modo análogo encontrariamos el ángulo formado por una recta y un plano.

De iguales medios nos valdriamos para resolver lós problemas inversos de tirar, por un punto tomado en el espacio, una recta que formase un ángulo dado con otra ó con un plano; la recta que resolviese este último problema seria tambien una de las de máxima pendiente del plano, que cumpliese con las mismas condiciones.

5.° Dados dos planos, averiguar el ángulo que forman.

Supongamos que el ángulo que buscamos sea el for-

mado por los planos (AB) y (AC), hallaremos su comun interseccion (A′ B′), le tiraremos por un punto cualquiera (B″) un plano perpendicular que podrá estar espresado por la misma proyeccion de la interseccion con su graduacion correspondiente, encontraremos las rectas (*ab*) y (*cd*) intersecciones de este último plano con los propuestos, y el problema quedará reducido al anterior, pues el ángulo que forman los dos planos referidos será el mismo que el que nos den las dos rectas anteriores. Fig. 60.

Hubiéramos resuelto mas sencillamente el problema, eligiendo un punto fuera de la comun interseccion de los planos propuestos, tirando desde él una perpendicular respectivamente á cada uno de ellos, y hallando el ángulo que estas rectas formasen entre sí, pues seria suplemento del que buscamos.

6.° Dada una recta (AB), hacer pasar por ella un plano cuya inclinacion sea $\frac{m}{n}$. Lám. 11. Fig. 61.

Concíbase el punto (B), por ejemplo, como vértice de una superficie cónica cuyas generatrices tengan la inclinacion espresada, la traza de este cono con el plano horizontal (5), estará dada por una circunferencia descrita desde el punto (B) como centro y con un rádio igual á (*n*) veces la diferencia de cotas ó la distancia de este punto al plano. Debiendo ser el plano pedido tangente á este cono, los (A′ B′) cumplirán con las condiciones exigidas.

El problema no hubiera tenido sino una solucion, si la circunferencia descrita hubiese pasado por el punto (A): en este caso la recta dada hubiese sido la escala de pendiente del plano buscado. Si la misma circunferencia hubiese dejado dentro de ella el punto (A), el problema hubiera sido imposible.

7.° Si la recta dada fuese horizontal, emplearíamos

dos superficies cónicas cuyos vértices estubiesen en dos puntos de la recta y sus trazas en un mismo plano horizontal cualquiera, sus tangentes comunes esteriores serian horizontales de otros tantos planos que responderán al problema.

Fig. 62.

Un procedimiento idéntico seguiremos cuando la recta propuesta, por la cual ha de pasar el plano tenga tan poca inclinacion que el punto por donde deban tirarse las tangentes á la base del cono resulte fuera del papel; caso que se verificára tambien siempre que el ángulo dado sea tan grande que nos sea preciso elegir para trazar la base del cono, de modo que su radio tenga una magnitud suficiente, un plano muy distante de su vértice (*).

8.° La solucion que hemos dado al problema (6.° puede convenir sin modificacion alguna al de trazar sobre un plano horizontal, por un punto tomado en él, una recta tal que determine con un punto superior dado en el espacio, un plano que tenga una inclinacion dada con el de comparacion, sin mas que unir por medio de una recta los dos puntos designados.

9.° Por un punto (A) dado sobre un plano inclinado (CD) ó sobre una superficie curva, trazar una recta ó una curva (AF) tales que determinen con un punto superior (B′) en el espacio, un plano que tenga una inclinacion dada con el horizontal de proyeccion.

Fig. 63 y 64.

Este problema no difiere del anterior sino en que despues de haber hecho pasar por la recta que una los dos puntos dados un plano de la inclinacion pedida, es preciso hallar su interseccion con el plano ó superficie propuestos.

10. Por un punto dado sobre un plano inclinado, tra-

(*) Los cinco problemas siguientes se refieren á la desenfilada de las trincheras.

zar en él una recta tal que el plano que determine con un punto superior tomado en el espacio tenga una inclinacion pedida en sentido del perfil perpendicular á la proyeccion de la recta buscada.

Sean (A) y (B') los puntos dados, supongamos el problema resuelto, y que (AF) es la recta pedida, el plano que determine con el punto (B') debe necesariamente contener la generatriz (B' F), que se proyecta en sentido perpendicular á la recta (AF), perteneciente á una superficie cónica de revolucion cuyas generatrices tengan la inclinacion exigida; ademas, siendo las proyecciones (AF) y (B' F) perpendiculares por las condiciones del problema, el punto (F) debe pertenecer á una circunferencia cuyo diámetro (AB') sea la distancia horizontal que separa los dos puntos propuestos: ahora bien, si describimos la espresada circunferencia y hallamos la interseccion con el plano dado de la superficie cónica á que hemos hecho referencia, obtendremos en los puntos (F y F') de encuentro dos soluciones (AF y AF') del problema. Fig. 65.

El problema que tenemos resuelto de tirar planos tangentes á un cilindro puede tambien mirarse como fundamental para la resolucion de los siguientes. Lám. 9. Fig. 55.

1.° Por un punto dado en un plano inclinado trazar sobre este plano una recta que determine con un punto superior dado en el espacio un nuevo plano tal, que la distancia vertical comprendida entre los dos planos en un punto cualquiera esté con la distancia horizontal interceptada entre el punto de proyeccion de la referida vertical y la de la recta buscada en una relacion conocida, tal como $\frac{1}{3}$.

Sea (A) el punto dado en el plano inclinado (CD) y (B') el del espacio; por el supuesto, el plano que buscamos debe pasar por la recta (AB'); la parte de vertical en (B') com- Fig. 66.

prendida entre ambos planos nos es conocida en longitud, siendo en el caso presente (5,6); si trazamos pues desde el punto (B') como centro, una circunferencia cuyo rádio sea (16,8), tres veces la longitud anterior, y lo miramos como base de una superficie cilíndrica vertical, las intersecciones (AF) con el plano (CD) propuesto de los planos tangentes tirados á ella desde el punto (A), nos darán resuelto el problema.

Fig. 67. 2.° Si el punto dado anteriormente lo fuese sobre una superficie cualquiera, con la condicion de hacer pasar por él una curva trazada en la superficie que respondiese al problema precedente, la solucion seria la misma, considerando como plana la parte de superficie inmediata al punto dado. Bajo este supuesto se determinaria un primer elemento de la curva buscada y se prolongaria hasta el punto de la superficie que permitiese, sin error sensible, considerarlo en línea recta; á partir de este punto se repetiria la misma operacion con relacion al nuevo plano que se adaptase en aquel espacio á la superficie, y así sucesivamente.

3.° Por un punto tomado en una curva existente en un plano vertical tirarle una tangente.

Lám. 12. Fig. 68. Sea (AB) la curva propuesta y (C) el punto dado: mirando la (AB) como directriz de una superficie cilíndrica cuya traza en un plano horizontal (1) sea la (A' C' D'), y tirándola en (C') una tangente, esta nos dará en la proyeccion de la tangente á la curva primitiva otro punto (1) acotado, que en union con el (4) de tangencia servirá para determinarla.

4.° Por un punto tomado fuera de una curva vertical,

Fig. 69. pero existente en su mismo plano, tirarle una tangente.

La solucion de este problema tampoco envuelve dificultades; por el punto dado (C) tiraremos una recta paralela á las generatrices de un cilindro cualquiera, prolon-

gadas hasta el plano horizontal que contenga su traza; la tangente (C′–C″) á esta nos indicará la generatriz (C′–8) que contiene el punto de contacto, con lo cual habremos obtenido la tangente que buscamos.

Sin embargo, el mucho uso que es preciso hacer en las aplicaciones del problema que acabamos de resolver, ha hecho sustituir á la solucion anterior otra mucho mas sencilla, fundada en la proposicion siguiente.

Si trazamos una recta cualquiera (AB) en un plano, y hacemos girar á este al rededor de aquella, se verificará, cuando el plano haya tomado el menor ángulo posible con el horizontal, que la charnela será su línea de máxima pendiente, y por consiguiente que sus horizontales (H) serán perpendiculares á la proyeccion de la recta enunciada: 2.°, que cuando el mismo plano continuando su giro haya tomado el mayor ángulo posible, esto es, que esté en posicion vertical, el ángulo formado por sus horizontales con la proyeccion de la recta sobre que gira, se habrá reducido á cero; y 3.°, que á consecuencia de estas dos posiciones límites se verificará, en las posiciones intermedias, que cuanto mayor sea el ángulo que forme el plano con el horizontal, sus horizontales formarán un ángulo tanto mas pequeño con la proyeccion de la parte descendente de la recta charnela. Fig. 70.

Esto supuesto, si tenemos una curva convexa (AB) y un punto (C) fuera de ella por el cual tratemos de tirarla una tangente, y suponemos por el punto dado trazada una recta cualquiera (CD) que contenga todas las cotas de la curva, y por ella hacemos pasar un plano arbitrario tambien, se verificará haciéndole girar al rededor de esta recta, y obligándole á apoyarse sucesivamente en todos los puntos de la curva, que cuando el referido plano haya tomado el mayor ángulo posible, la recta (C′ D′) interseccion de ambos planos habrá resultado tangente ó rasante, segun Fig. 71.

la naturaleza de la curva, siendo secante en todas sus demas posiciones; la inspeccion sola del abatimiento (A′ B′) nos dá á conocer, que para que sea posible el tirar la tangente es necesario que el referido ángulo, que forman con la horizontal las rectas (C′ D′), haya tocado un *máximo* en su crecimiento, ó lo que es lo mismo, que á partir de este ángulo mayor que los anteriores haya empezado á decrecer; cuando esto no se verifique, solo responderá al problema una rasante.

Volvamos ahora á las proyecciones; si unimos los puntos (3—4, etc.) de la recta (CD) arbitraria con los de igual cota de la curva, cada una de estas horizontales, en union con la recta anterior, nos indicará una posicion diferente del plano que gira al rededor de la recta (CD) tomada como charnela. Por lo espuesto anteriormente vemos que á la posicion cuya horizontal es (6) corresponde el mayor ángulo del plano, y que al punto (6) corresponde una *tangente*, puesto que forma su horizontal menor ángulo que sus anteriores con la proyeccion descendente de la recta charnela, y que á partir de ella van aumentando otra vez los ángulos que forman con la misma proyeccion las horizontales que la siguen: debemos, pues, concluir que la recta (3–6), que se proyecta segun el mismo plano de la curva, la es necesariamente tangente; hubiéramos deducido que la recta buscada no podia ser sino rasante, si los ángulos referidos formados por las horizontales y la proyeccion de la parte descendente de la recta arbitraria hubiera ido disminuyendo sucesivamente sin alcanzar un *mínimo* hasta el último punto de la curva.

Fig. 72. Si la curva hubiera sido cóncava, iguales consideraciones hubieran dado solucion al problema, con la única diferencia de que en vez de responder á él las posiciones de la horizontal que dan un ángulo *mínimo*, seria inversamente las que dieren un ángulo *máximo* con la misma pro-

yeccion descendente de la recta charnela; porque entonces la posicion mas deprimida que seria dado tomar al plano que gira sobre la recta arbitraria, apoyándose en todos los puntos de la curva, seria la que llenaria las condiciones que hemos visto cumplir á la parte mas elevada cuando la curva era convexa.

Nada tendriamos que añadir si la curva fuese cóncava-convexa; solo se verificaria que si la tangente lo era en un punto de inflexion, el ángulo referido formado por la horizontal perteneciente á este punto seria á un mismo tiempo un *máximo* y un *mínimo* relativamente á los dos trozos en que podiamos considerar dividida la curva. Fig. 73.

Síguese de todo lo espuesto, que para resolver el problema enunciado, nos basta solo fijarnos en los cambios de ángulo de las horizontales referidas, con relacion á la proyeccion descendente de la recta arbitraria, perteneciendo á la tangente mas alta el punto marcado por la horizontal cuyo ángulo fuese el menor de todos los *mínimos*, y á la mas baja el mayor de todos los *máximos*.

5.° Si se tratase de una curva plana inclinada, los problemas de tirarle una tangente por un punto tomado en ella, ó bien fuera, podrian ser resueltos tambien muy sencillamente sin hacer uso de cilindros auxiliares.

Nos fijaremos en el caso de que la curva sea dada únicamente por tres de sus puntos acotados, como el menos favorable á nuestro intento.

Sea la curva (AB) la propuesta, y (C) el punto dado: tiraremos por este punto una recta que, no teniendo comun con la curva sino un arco muy pequeño, la sea sensiblemente tangente, y solo nos restará acotarla. Para esto determinaremos dos horizontales del plano que pasa por los tres puntos acotados de la curva (4, 5 y 8), que será el mismo que la contiene con su tengente, y ellas nos da- Fig. 74.

rán dos puntos (4 y 6) acotados en esta, y por consiguiente resuelto el problema.

Fig. 75. Si el punto fuera el (C), tomado fuera de la curva, una sola horizontal (5) del plano que la contiene, bastaria para determinar la tangente, puesto que un punto (C) nos es conocido de antemano.

Igualmente, la combinacion de los dos problemas primitivamente resueltos de tirar planos tangentes á un cono y á un cilindro, puede suministrarnos los medios de tirar tangentes á una curva cualquiera por puntos tomados en ella, ó bien elegidos fuera, mirando á la curva propuesta como directriz de dos cilindros, dos conos, ó bien un cono y un cilindro arbitrario: la interseccion de los dos planos tangentes respectivamente á dichas superficies, que lo fuesen segun las generatrices que se cruzan en el punto designado de contacto, responderia al problema en el primer caso; y la interseccion de los referidos planos, segun una recta que pasando por el punto propuesto tuviese ó no algun elemento comun con la curva propuesta, nos responderia afirmativa ó negativamente al segundo.

La complicacion, no obstante, de este método, y la facilidad de sustituirlo por otros mas sencillos, aunque solamente aproximados, que vamos á esponer, hace conveniente el desterrarlo de la práctica.

Fig. 76. 1.ª Tirar á una curva aislada de doble curvatura una tangente por un punto tomado en ella.

Sea (AB) la curva dada, y (C) el punto de tangencia.

Recordaremos primeramente que establecimos en otro lugar, que las cotas en curvas de la naturaleza que nos ocupa debian situarse de modo, que los arcos que las separasen pudiesen ser considerados sin error sensible como líneas rectas.

Estando el punto (C) en la interseccion de los dos lados contiguos del polígono que resulta del supuesto, la tan-

gente que pase por él deberá estar en el plano que determinan, puesto que la curva es sensiblemente plana segun los pequeños arcos que comprenden los referidos lados.

El problema queda reducido al que hemos resuelto con relacion á una curva plana; ninguna dificultad ofrecerá, pues, el hallar otro punto acotado (C) de la tangente que buscamos.

Si el punto de tangencia hubiese sido elegido entre dos cotas, el elemento correspondiente pudiera ser combinado separadamente con cada uno de los contiguos, de lo que nos resultaria dos planos diferentes, y por consiguiente dos tangentes distintas; pero en semejante caso pudiéramos muy bien mirar á estas, como las posiciones límites de una recta que respondiese aproximadamente al problema, pudiendo obtarse por la misma acotacion correspondiente al arco de contacto, por existir este á la vez en ambos planos. Esta última solucion seria la mas aproximada, pues diferiria muy poco de la que hubiésemos hallado refiriendo este problema al anterior, esto es, habiendo empezado por determinar la cota perteneciente al punto designado de contacto. Fig. 77.

2.ª Dada una curva de doble curvatura y un punto fuera de ella, tirarle desde él una tangente. Fig. 78.

Sea la curva (AB) y (C) el punto dado; la única recta que puede serle tangente es la (CD); sin embargo, determinando las horizontales del plano que contiene los dos elementos contiguos al punto de contacto, vemos que sus cotas no coinciden con las de la supuesta tangente; lo que nos prueba que el problema no tiene solucion, porque no existe la tangente en el mismo plano que aquellos elementos, y por consiguiente que es una rasante á la curva propuesta.

Si los puntos hubiesen sido elegidos con relacion á un trozo de curva existente en un plano vertical, nos

hubiésemos referido á lo espuesto sobre esta especie de curvas.

PLANOS TANGENTES
A UNA SUPERFICIE CUALQUIERA.

PLANOS CUYO PUNTO DE TANGENCIA ES DADO.

Por un punto tomado en una superficie dada por curvas de nivel, tirarle un plano tangente.

Dos casos pueden ocurrir, ó que el punto de tangencia esté situado en una de las curvas de la superficie, ó bien que lo esté entre dos de ellas.

Tambien puede suceder que la superficie reglada que hemos sustituido á la zona determinada por cada dos curvas de la superficie, sea desarrollable ó gaucha, en las inmediaciones del punto de contacto.

Disentiremos separadamente cada uno de los casos que resultan de combinar estas circunstancias.

ZONAS DESARROLLABLES.

Lám. 13. 1.° Por un punto (C) situado en una curva de la su-
Fig. 79. perficie, tirarle un plano tangente.

Sabemos que el plano tangente que buscamos estará determinado por las tangentes á dos secciones trazadas en la superficie, que pasen por el punto propuesto. Tirando, pues, por este punto una tangente á la curva de nivel que lo contiene, obtendremos desde luego una horizontal acotada del plano que buscamos: concibiendo ademas por el mismo punto un plano perpendicular (CM) á esta horizontal, cortará á la superficie propuesta segun una curva, cuyo elemento correspondiente al punto referido, pertene-

cerá igualmente al mismo plano, estando ademas situado en direccion de su máxima pendiente; pero en el caso que consideramos, este elemento degenera en la normal generatriz (CM) relativa al punto dado comprendida entre la curva que lo contiene y su inmediatamente próxima inferior, siéndonos ademas conocidas sus dos cotas estremas; luego el plano tangente quedará completamente determinado, puesto que podemos construir desde luego su escala (AB) de pendiente.

En general el problema tendrá dos soluciones, porque siempre nos será dado hacer consideraciones análogas con respecto á la normal (CN) relativa á la zona superior al punto de contacto. Sin embargo, no tendria sino una sola, cuando ademas de confundirse la proyeccion de ambas normales en una sola recta (MM′), sus proyecciones sean iguales, siendo tambien equidistantes los planos que causen las secciones de nivel en la superficie, porque entonces no formarán sino una mínima recta.

Si concebimos ademas que uno de los planos tangentes referidos gire al rededor de la horizontal de contacto, separándose de la normal segun la cual tocaba á la superficie, hasta que la parte situada á un lado de la horizontal venga á coincidir con el segundo plano tangente, se verificará, en todas las posiciones que tomará el plano durante su movimiento, que si bien deja de ser rigorosamente tangente á la superficie, degenerando en rasante, satisfará siempre á la condicion de no cortarla en las inmediaciones del punto dado, por lo que podemos decir que el problema tiene una infinidad de soluciones aproximadas, comprendidas entre los dos límites marcados por los dos planos tangentes verdaderos.

2.° Si el punto (C) propuesto fuese dado en el interior de la zona, hariamos pasar por él la normal generatriz correspondiente, la que en sus estremos nos daria dos Fig. 80

horizontales acotadas pertenecientes á la escala (AB) del plano que buscamos, quedando este determinado. En este caso el problema no ofrece sino una solucion, pues aun cuando construyamos la curva intermedia que pasa por el punto dado, concibiendo dividida en dos la zona primitiva, las dos normales tiradas desde el referido punto de contacto á las curvas verdaderas de la zona, se confundirian en una misma recta.

La condicion introducida en los dos problemas anteriores de que la zona sea desarrollable en las inmediaciones del punto de contacto, hace que los planos tangentes lo sean en toda la estension de la zona, porquè esto equivale á decir, que la recta generatriz normal á una de las curvas que la terminan, lo es igualmente á la otra; ó bien que las tangentes á estas tiradas por los estremos de aquella son paralelas, circunstáncias que no se verifican en el caso que inmediatamente va á ocuparnos.

ZONAS GAUCHAS.

Fig. 81. 1.° Por un punto (C) situado en una curva de la superficie, tirarle un plano tangente.

Tirando como anteriormente la tangente horizontal que pasa por el punto de contacto, obtendremos desde luego una horizontal del plano pedido; como este debe contener ademas la generatriz (CM) perteneciente á la zona gaucha, y perpendicular á la horizontal anterior, por construccion acotada ya en dos de sus puntos, tendremos resuelto el problema, puesto que nos son conocidas dos cotas de la escala de pendiente del plano tangente que buscamos.

El caso, sin embargo, no será idéntico al anterior cuando la zona era desarrollable, porque cortando oblícuamente la normal en (C) á la curva inferior en el punto (M),

la horizontal del plano tangente en este punto no se confundirá con la tangente en el mismo á la curva que pasa por él, perteneciente á la superficie, porque no será paralela á la tirada por (C), por el supuesto de ser gaucha la zona que contiene el punto de contacto: el plano tangente producirá, pues, una interseccion (MCR) en el interior de la zona, como sucede siempre en los planos tangentes á las superficies de esta especie.

Una diferencia existirá sin embargo en la naturaleza de esta interseccion relativamente á la superficie total, y es que podrá no afectar sino una pequeña parte de la zona inmediata á la de contacto, ó prolongarse parcial ó indefinidamente por las zonas sucesivas, segun que la distancia horizontal que separa las curvas de la superficie, en una unidad de diferencia de cotas, sea mayor ó menor que la perteneciente á las horizontales del plano anteriormente determinado.

Lo mismo que en el caso anterior, el problema tendrá dos soluciones rigorosas límites, y una infinidad de aproximadas intermedias.

2.° Por un punto tomado en el interior de una zona, tirar un plano tangente á una superficie.

Este problema se refiere enteramente al anterior en el caso que consideramos, pues para que el plano que tratamos de determinar sea efectivamente tangente en el punto designado, será necesario empezar por construir la curva intermedia que lo contiene, y partir de su tangente horizontal en el punto señalado de contacto.

Reasumiendo cuanto acabamos de decir acerca del plano tangente, cuando el punto de contacto sea dado sobre una zona gaucha, vemos que rigorosamente hablando no puede resolverse el problema sin que el plano referido produzca una interseccion en la zona de contacto, dependiente de la manera de que nos valemos para espresar la Fig. 81.

superficie, porque en realidad es independiente de la forma general que afecte la misma. Si tenemos tambien en cuenta que las curvas de nivel, que definen la superficie total, deben estar trazadas lo suficientemente próximas para que las normales á la una lo sean próximamente á la otra, podremos concluir, que sin afectar á la solucion rigorosa del problema de una manera sensible, podemos hacer desaparecer la interseccion referida del interior de la zona de contacto, tomando por unidad de la escala de pendiente del plano tangente anteriornente determinado, la distancia horizontal (AB) que separa las tangentes paralelas á las dos curvas que terminan la zona que contiene el punto de contacto. Esto equivaldria, cuando el punto referido esté dado sobre una curva, á hacer girar el plano tangente al rededor de la horizontal de tangencia, hasta que venga á coincidir con la nueva posicion que le hemos asignado, lo que le habrá hecho degenerar en rasante; seguiremos un procedimiento análogo en el caso de que el punto dado lo esté en el interior de una zona, pero tomando por horizontal de giro la tangente á la curva intercalada que la contuviese, con el objeto de no desviar el punto de contacto de su posicion verdadera.

VARIEDADES DEL PLANO TANGENTE.

El plano tangente en un punto dado en la superficie, aun determinado como acaba de indicarse, no dejará siempre la superficie á un lado enteramente, sino que tendrá diferentes posiciones con relacion á ella, segun la forma que esta afecte en las inmediaciones de la zona de contacto.

Analizando cuidadosamente las posiciones que el plano tangente puede tomar con relacion á una superficie dada,

es como podrá llegarse á formar idea completa de sus inflexiones; porque si bien las curvas de nivel definen á la vista con bastante exactitud la curvatura de la superficie en el sentido en que estan trazadas, no se verifica lo mismo en la direccion de sus líneas de pendiente. Vamos, pues, á ocuparnos de este análisis, empezando por la parte de superficie comprendida entre dos curvas.

CURVAS EN SENTIDO HORIZONTAL.

Si se consideran dos porciones de curvas horizontales bastante próximas comprendiendo una zona de la superficie, siendo á la vez convexas, la porcion de superficie que terminan será tambien convexa, esto es, que el plano tangente la dejará toda ella debajo de él, de los dos lados del elemento de contacto. Fig. 82.

Semejantemente, si las dos curvas fuesen cóncavas á la vez, la superficie será cóncava tambien, pasando el plano tangente por debajo. Fig. 83.

Si las dos curvas formasen una inflexion en el mismo sentido, la superficie seria en parte cóncava y en parte convexa, á partir de la línea que uniese los puntos de inflexion, y el plano tangente seria superior ó inferior relativamente á partir del mismo límite. El caso en que una de las curvas degenerase en una recta entra en los precedentes, pues sirviendo la línea recta de límite á las diferentes curvaturas, puede considerarse por abstraccion, que tiene la misma curvatura que la horizontal inmediatamente próxima, prolongacion del elemento contiguo de la curva á que está unida. Fig. 84.

INFLEXION EN SENTIDO DE LAS LINEAS DE CONTACTO.

Fig. 85. Cuando la curvatura de las líneas de nivel inmediatamente próximas no está vuelta hácia la misma parte ó no es en el mismo sentido, se presentan nuevas combinaciones. Supongamos las dos curvas opuestas por su convexidad: si se concibe entre ellas una série de curvas intercaladas infinitamente próximas las unas á las otras, se hallará necesariamente una que será recta en una cierta parte de su estension, á cuyo centro de curvatura estará en el infinito.

En consecuencia, entre esta porcion de recta y la curva convexa, la superficie será convexa, siendo cóncava entre la misma recta y la otra curva, de suerte que la superficie formará una inflexion á partir de esta horizontal hácia la parte superior ó inferior de las generatrices en esta parte de zona, dejándola el plano tangente de una parte de un lado y de otra del otro á partir de la misma recta intermedia.

Fig. 86. En vez de estar las curvas referidas, opuestas por su convexidad, pueden estarlo por su concavidad: la superficie presentará entonces una inflexion análoga á la del caso precedente; la única diferencia estribará en que cuando las curvas están opuestas por su convexidad, la superficie es convexa en la parte superior á la horizontal intermedia y cóncava en la inferior, mientras que sucede lo contrario cuando las dos curvas de la zona se presentan su concavidad.

DOBLE INFLEXION.

Lo que acabamos de decir acerca de las curvas convexas y cóncavas, indica lo que debe tener lugar cuando las curvas sean de inflexion.

Si inmediata á una curva de inflexion se encuentra otra que no lo sea, estas curvas tendrán en una cierta parte sus curvaturas vueltas en el mismo sentido, y opuestas en el otro. Existirá entonces una inflexion en la superficie en sentido horizontal y otra en sentido de sus líneas de pendiente; pero cada una de estas especies de curvatura, sea horizontal ó vertical, no se estenderá sino de un solo lado del elemento de contacto del plano tangente en el punto de inflexion. Fig. 87.

Si las dos curvas fuesen de inflexion y de curvaturas opuestas en todos sentidos, habria doble inflexion como en el caso precedente; pero estas inflexiones se estenderian en todos sentidos con relacion al elemento de contacto. Fig. 88.

SUPERFICIE COMPRENDIDA ENTRE DOS ZONAS.

No constituyendo cada zona en toda superficie espresada por curvas de nivel sino una de sus articulaciones, por decirlo así, para juzgar completamente de la forma que afecta en un punto, es preciso considerar dos zonas sucesivas, si este punto está situado sobre una de las curvas que la definen, ó bien tres zonas si se hallase en el interior de una de ellas.

Si consideramos, pues, al efecto tres curvas comprendiendo dos zonas de la superficie, siendo todas tres al mismo tiempo convexas ó cóncavas, la superficie será igualmente convexa ó cóncava en sentido horizontal; pe-

ro podrá suceder que sea tambien al mismo tiempo convexa, recta ó cóncava en el sentido de sus líneas de pendiente.

Fig. 89. La primera circunstancia tendrá lugar, si la distancia de la curva de nivel superior á la de enmedio, es mayor que la distancia de esta á la inferior.

La segunda se encontrará cuando las dos distancias sean iguales, verificándose en fin la tercera, inversamente á la primera, cuando la distancia entre las curvas inferiores sea mayor que la de la curva intermedia á la superior.

La forma de la superficie comprendida entre las dos zonas que hemos considerado puede ademas complicarse con inflexiones, cuando las tres curvas que las terminan sean sucesiva ó simultáneamente de inflexion, ó bien que sus curvaturas estén vueltas en sentidos diferentes; pero lo que hemos dicho anteriormente al considerar una zona aislada, puede bastarnos para concebir lo que sucederá en cada una de estas diferentes circunstancias.

SUPERFICIE COMPRENDIDA ENTRE TRES ZONAS.

Fig. 90. El caso de considerarse á la vez tres zonas y cuatro curvas, puede mirarse implícitamente contenido en el anterior, pues nos ha dado á conocer la relacion que existe entre la zona intermedia y cada una de las estremas. La sola particularidad interesante que presenta el caso de que se trata es, que como se consideran en él cuatro curvas, la superficie puede afectar una nueva forma en sentido de sus líneas de pendiente, pues no solamente puede ser convexa, recta ó cóncava, sino tambien sufrir una inflexion en el sentido indicado.

SUPERFICIE EN GENERAL.

Combinando las diferentes circunstancias en que hemos visto pueden encontrarse las diferentes zonas de una superficie dada por curvas de nivel, se vendrá finalmente á deducir, que independientemente de su curvatura horizontal á partir de un punto dado, la que podrá deducirse inmediatamente de la forma de las secciones de nivel, por medio de las cuales está definida, puede ser convexa, recta, cóncava y cóncava-convexa, esto es, formar una inflexion en sentido de sus líneas de pendiente.

La primera circunstancia tendrá lugar cuando á partir del punto dado la distancia horizontal de las curvas de nivel vaya aumentando sucesivamente de la parte inferior á la superior; será recta, cuando permanezca constante la referida distancia; cóncava, cuando inversamente al primer caso vaya disminuyendo hácia la parte superior; y formará finalmente una inflexion, 1.º cuando las secciones de nivel tengan sus curvaturas opuestas, ó 2.º cuando á partir del nivel que nos hemos propuesto, la distancia horizontal que separa las curvas va aumentando simultáneamente hácia la parte superior é inferior, ó á la inversa. Lám. 1.ª Fig. 5.

De todo lo que hemos espuesto puede ademas sacarse una consecuencia, y es, que el plano tangente en un punto no dejará en general debajo de sí las zonas de la superficie inmediata á la de contacto, si sus secciones de nivel no son convexas en sentido horizontal, y su curvatura en sentido de sus líneas de pendiente no es de la misma naturaleza, y que solo las dejará por encima cuando las espresadas curvaturas sean cóncavas en ambos sentidos.

PLANOS TANGENTES CUYO PUNTO DE TANGENCIA NO ES DADO.

1.° Dada una superficie por curvas de nivel, tirarle un plano tangente por un punto tomado fuera de ella.

Para resolver este problema miraremos el punto dado como vértice de una superficie cónica que envuelva la propuesta: los planos tangentes á aquella lo serán igualmente á esta última.

El problema enunciado envuelve, pues, como preliminar, el siguiente. Dada una superficie por curvas de nivel y un punto fuera de ella, trazar una superficie cónica que le sea tangente, siendo su vértice el punto propuesto.

Para esto hagamos pasar por el punto vértice diferentes planos verticales tan próximos como nos sea necesario: cada uno de estos planos cortará á la superficie propuesta segun una curva que estará proyectada en la traza del referido plano vertical; la tangente tirada á esta curva desde el punto vértice será una generatriz de la superficie cónica que buscamos.

El problema estará, pues, reducido al de tirar una curva dada en un plano vertical, una tangente desde un punto tomado fuera de ella; pero situado en el mismo plano.

Al presente ninguna dificultad puede envolver para nosotros este problema; á lo único que habremos de dar atencion es á investigar de antemano la naturaleza de la seccion causada por el plano vertical en la superficie, esto es, si es convexa, cóncava ó de inflexion, lo que nos manifiestan desde luego, como hemos visto anteriormente, los intervalos que separan las curvas horizontales en sentido del perfil.

Esto supuesto, sea (V) el punto dado por el cual deban

pasar los planos tangentes á la superficie espresada por curvas de nivel en la figura ; el punto referido corresponderá al vértice de la superficie cónica supuesta : haciendo pasar por el punto (V) un plano vertical (VM), este cortará á la superficie dada segun una curva proyectada en (MM') que será convexa, puesto que los intervalos que separan las curvas de nivel van aumentando á medida que van creciendo las cotas : valiéndonos, pues, de la recta arbitraria (VS), la horizontal (26) que forma un ángulo *mínimo* con la parte de proyeccion descendente de esta recta, nos marcará en el perfil (MM') un punto que será el de contacto con relacion á la recta que pase por el punto (V) propuesto: esta será, pues, una generatriz de la superficie cónica que buscamos. Lám. 14. Fig. 91.

De un modo análogo obtendremos en el perfil (NN) el punto (22) de contacto de la generatriz correspondiente, observando que en él la curva es cóncava, y que por consiguiente debemos fijarnos en un *máximo*, con relacion al ángulo que forman las horizontales que se apoyan en la recta arbitraria (VS), y en los puntos acotados del perfil (NN) que consideramos.

Siendo el perfil (R' R) cóncavo-convexo, el punto de contacto estará dado por la horizontal (28), cuyo ángulo con la recta arbitraria es á un tiempo un *mínimo* para la parte convexa, y un *máximo* por la cóncava.

Del mismo modo podriamos ir determinando los puntos de contacto de todas las rectas tiradas desde el punto (V), tangencialmente á la superficie ; su union constituiria la curva de contacto (A), entre la superficie cónica que forman estas rectas y la superficie propuesta.

La superficie cónica estará completamente definida, puesto que conocemos dos puntos en cada una de sus generatrices; el comun á todas ellas y el de contacto, ó bien su vértice y curva directriz acotados.

Resuelto este problema preliminar, ninguna dificultad puede ofrecer el primitivo que hemos enunciado. En efecto, cada generatriz, en union con la horizontal tangente á la curva que pasa por el punto de contacto de aquella, nos determinará un plano que tendrá un elemento comun con la superficie. La generatriz (VB) y la horizontal (30) nos darán el plano (V′ B′) tangente en (B″) á la superficie.

El problema, como se vé, tendrá una infinidad de soluciones: sin embargo, mirado bajo un punto de vista riguroso, no quedarán satisfechas sus condiciones, por todos los puntos de la curva de contacto. En efecto, estando terminada bruscamente la superficie, en el caso presente, por su curva inferior, se vé con facilidad que las generatrices del cono que se apoyan en esta curva no son sino rasantes á la superficie: lo mismo sucederá en la parte (CC), en la que la suponemos cortada por un plano vertical que la termina.

CONDICIONES QUE DETERMINAN EL PROBLEMA.

Para que el problema sea determinado será preciso añadir alguna otra condicion á las enunciadas.

Si se exigiese que fuera tangente el plano en una seccion dada, para que tuviese alguna solucion el problema, seria necesario que cortase la curva de la seccion á la referida de contacto; verificándose esta circunstancia tendrá el problema una, dos ó mas soluciones, segun la posicion que tenga el plano que cause la seccion.

Si se pidiese que el plano fuese tangente en una seccion horizontal, la (30), por ejemplo, el problema solo tendrá tres soluciones, dadas por sus puntos de encuentro con la curva de contacto.

Tambien pudiera hacerse determinado el problema exigiendo que el plano tangente fuese el que formase un án-

gulo dado con el horizontal de proyeccion, ó el que formase con él, el mayor ó el menor ángulo, ó bien el que dejase debajo de sí ó encima toda la superficie.

Para resolver directamente estos problemas, se hace necesario cortar la superficie cónica, tangente ó la propuesta, por un plano horizontal cualquiera, y proyectar la curva de interseccion.

En la figura se supone que este plano horizontal pasa á la cota (17): fácil es proyectar la curva de interseccion, advirtiendo, como hemos hecho en otro lugar, que cada dos generatrices estan en un mismo plano. En efecto, en vez de hallar las escalas de pendiente de todas las generatrices, para unir por una línea los puntos que tengan la cota (17), que pertenecerán á la seccion indicada, nos bastará trazar únicamente la escala relativa á una de ellas: fijándonos en la (VD), por ejemplo, se vé con relacion á la (VE) que la horizontal (17), paralela á la (20) nos dará un punto (*a*) de la curva interseccion que buscamos. Del mismo modo podriamos obtener los restantes. Aún pudiéramos, en el caso presente, prescindir de acotar ninguna de las generatrices, valiéndonos de la recta arbitraria (VS) que hemos hecho pasar por el punto vértice, y que tenemos ya acotada análogamente á la superficie, con solo determinar en ella el punto correspondiente á la cota (17), á cuya altura hemos supuesto pasa el plano horizontal que ha de cortar á la superficie cónica obtenida anteriormente.

Sea (*a*) la curva referida.

Esto supuesto, tratemos de resolver el primero de los problemas enunciados; determinemos el plano tangente á la superficie propuesta que forma un ángulo dado $\left(\frac{m}{n}\right)$ con el plano horizontal.

Mirando el punto (V) como vértice de otra superficie cónica de revolucion, cuyas generatrices formen el ángulo

pedido, y hallando tambien su interseccion con el mismo plano anterior (17), se verificará que las dos curvas referidas existentes ambas en el mismo plano horizontal, quedarán la una dentro de la otra, se cortarán, tendrán algun punto de contacto, ó no tendrán ningun punto ni espacio comun: en donde el primer caso se verifique, nos indicará que no existe ningun plano tangente á la vez á las dos superficies cónicas descritas, y por consiguiente, que es tal la naturaleza de la superficie propuesta y la inclinacion asignada á su plano tangente, que el problema no tiene solucion: los demas casos nos manifestarán las soluciones que puede tener el problema segun el número de puntos de contacto que se hallen entre las dos curvas referidas, ó bien el número de tangentes que á la vez puedan tirarse á ambas.

Si el ángulo pedido, para el plano, fuese el de $\left(\frac{7}{9}\right)$, el arco de círculo (FG) nos daria en (H) una solucion única del problema, relativamente á la rama parcial de la izquierda.

Propongámonos descubrir cuál será el plano tangente á la superficie propuesta, que forme el mayor ó el menor ángulo con el horizontal de proyeccion. El primero será el plano (MK) dado por la horizontal tangente á la curva (a) que pase mas próxima al punto vértice (V), la cual es bien fácil de presumir; el segundo, por la inversa, estará dado por la horizontal mas lejana, ó bien por la tangente en (P) á la misma curva. Sin embargo, si se añadiese la condicion de que el referido plano tangente habia de ser esterior á la superficie, el que formase el mayor ángulo estaria dado por la tangente á la curva (a) que pasase por el punto (O

PLANO TANGENTE SUPERIOR A LA SUPERFICIE.

No ofreceria mayores dificultades el resolver el problema que nos ocupa, cuando se exigiese que el plano tangente dejase de un lado toda la superficie. La tangente (NQ) nos dará un plano (V′ Q′) que cumplirá con la condicion de dejar debajo de sí toda la superficie, tocándola en dos puntos sin cortarla en ninguna parte; de igual propiedad gozarán todos los planos que contuviesen á las tangentes que pueden tirarse á partir del punto (N) á la derecha de la curva (*a*) referida, aunque estos solo tendrian un punto de contacto con la superficie. El problema puede tener por consiguiente una infinidad de soluciones en el caso particular que espresa la figura: este número sin embargo pudiera ser limitado, ó bien no ofrecer ninguna; tal sucederia si el punto (V) estuviese situado en una garganta de la superficie, en una posicion tal como el (W): el plano tangente que pasase por él se percibe fácilmente que cortaria en alguna parte á la superficie. Pero independientemente de la posicion del punto (V) referido, se vé tambien que las soluciones á que se presta la figura son debidas á la disposicion particular de los datos; en efecto, si la parte de curva (*a*) á la derecha del punto (N) fuese cóncava en vez de ser como lo es convexa, como se verifica á la izquierda del otro punto (Q) de contacto de la horizontal (QN), el problema no hubiera tenido sino una sola solucion dada por la espresada tangente, y aun ésta pudiera haber desaparecido si las generatrices en (N) y (Q) fuesen tangentes á la superficie en un punto de inflexion, como sucede á la (VR), pues entonces el plano tangente que pasase por ellas penetraria la superficie y no llenaria las condiciones del problema.

En todo lo que hemos dicho hasta aquí hemos seguido

el supuesto, de que el plano determinado habia de ser rigorosamente tangente á la superficie propuesta; en la práctica, sin embargo, con relacion al último problema de que hemos tratado, suele no ser tan interesante esta última circunstancia de rigorosa tangencia, bastando solo el que el plano deje debajo de sí toda la superficie, con tal que llegue á tocarla, aun siéndole solo rasante.

Esta circunstancia hace sufrir un cambio notable á la curva (A) anteriormente determinada, no solo con relacion á su naturaleza, sino tambien con respecto á su posicion, y por consiguiente lo sufrirá tambien la superficie cónica que se apoya en ella: dejará de ser en efecto la curva (A) de tangencia entre las dos superficies referidas, y se convertirá en el lugar geométrico de todos los puntos, en los que se verifique, que las generatrices que parten del vértice (V) toquen ó rasen la superficie propuesta, pero sin llegar á penetrarla ni anterior ni posteriormente, resultando por consiguiente en cada generatriz un solo punto comun con el sólido que envuelve, la superficie espresada por las curvas de nivel enunciadas.

La circunstancia nuevamente introducida, lejos de complicar el problema, no hace sino simplificarlo. En efecto, solo tendremos que poner atencion en investigar en cada seccion causada por los planos verticales que pasan por el vértice del cono, cuál es la recta que pasando por este punto, y apoyándose en todos los de aquella, forma el mayor ángulo con el plano horizontal de proyeccion, prescindiendo de si las secciones causadas por los planos verticales, en la superficie general, son curvas cóncavas, convexas ó de inflexion, y aun suprimiendo la investigacion de la curva en las partes cóncavas de la superficie.

En una palabra, marcaremos únicamente en cada perfil aquel punto en que se verifique, que la horizontal que pasa por él y se apoya en la recta (VS) arbitraria, forme

el menor ángulo con la parte descendente de esta recta.

De este modo el punto de contacto (28) de la generatriz (VR) degenerará en el (33), y el (22) de la (VN) en el (30), obteniéndose por resultado una curva (B) bien diferente de la primera (A), y por consiguiente una seccion (17), muy distinta de la (*a*) en la superficie cónica resultante.

Estas variaciones en nada cambian, sin embargo, la esencia de la solucion que hemos dado anteriormente al problema.

VARIEDADES DE LA SECCION EN EL CONO.

La solucion de los problemas que nos hemos propuesto últimamente, estriba esencialmente, como hemos visto, en la investigacion de la seccion causada en la superficie cónica auxiliar, por un plano horizontal cualquiera; aunque lo que llevamos espuesto sea lo bastante para efectuar las operaciones gráficas á que dé lugar el problema, en los casos particulares que puedan ocurrir, entraremos en el exámen de algunas singularidades que en el transcurso de la operacion pueden presentarse.

Si la superficie propuesta es tal que la cota de su curva inferior de nivel es mayor que la del punto por el cual se ha de tirar el plano tangente, y en una posicion análoga á la que les hemos atribuido en la figura (91) anterior, las generatrices de la superficie cónica auxiliar se irán elevando, y encontrarán al plano horizontal supuesto, por encima del punto dado, siempre que la cota de aquel sea mayor que la de éste, ó por la parte inferior en el caso contrario, quedando la curva resultante entre el punto dado, y la superficie en el primer caso y al lado opuesto en el segundo. Una cosa análoga sucederá cuando el punto

propuesto sea superior á toda la superficie : lo único que podrá verificarse, en algun caso particular, es que la curva interseccion del plano horizontal con la superficie cónica resulte ser cerrada.

Lám. 15. Fig. 92. Pero cuando se verifique que el punto dado esté situado de modo, que su cota sea intermedia entre las de las curvas de la superficie, se verificará que las generatrices de la superficie cónica, cuyo vértice está en (V), irán perdiendo la inclinacion, á partir del punto mas alto de la superficie, á medida que ésta se vaya deprimiendo, y sus puntos de encuentro con el plano horizontal supuesto se irán alejando cada vez mas del vértice de la superficie cónica. Si una de las generatrices (VB) llega á ser horizontal, no encontrará sino al infinito el plano referido, y por consiguiente la curva tendrá una rama (CD) prolongada indefinidamente, análoga á las de una parábola ó una hipérbola. La generatriz horizontal (VB) se halla fácilmente, determinando una seccion cuyo punto mas alto se halle á la misma altura que el vértice dado. Si la superficie continúa deprimiéndose mas, á partir de la generatriz horizontal referida, las nuevas generatrices que iremos obteniendo serán rectas descendentes, con relacion al mismo plano horizontal, y no lo encontrarán sino en prolongacion del vértice, al otro lado de este punto. Se obtendrá, pues, una segunda curva (EF) que tendrá, como la primera, un punto situado al infinito sobre la prolongacion de la misma horizontal (VB), y cuya convexidad será opuesta á la que se hubiera obtenido, si las generatrices se hubieran conservado ascendentes.

Si la superficie propuesta fuese ondulada, podria suceder el pasar sucesivamente de una á otra especie de curva, encontrándose siempre en el tránsito una generatriz horizontal, que nos daria en cada una de las curvas un punto situado al infinito. Para distinguir una de otra las curvas

á que hacemos referencia, las designaremos con el nombre de curva de la hoja ascendente ó descendente.

La proyeccion de la generatriz horizontal (VB) sobre la cual se hallan los dos puntos al infinito, sirve en cierto modo de límite á las curvas, á quienes pertenecen estos puntos: sin embargo, dicha horizontal no es por eso su asintota comun, sino únicamente una paralela á ella, puesto que la generatriz referida no está situada en el mismo plano (17) de las curvas. Para obtener la asintota verdadera (GH), la que sabemos no es otra cosa sino una tangente al infinito, es preciso tirar un plano tangente al cono en este punto segun la generatriz horizontal (VB), y hallar la interseccion con el plano (17) de las curvas. Pero este plano tangente al cono debe ser tangente al mismo tiempo á la superficie propuesta en el punto (K) en que la toca dicha generatriz; luego si por el punto (K) de contacto de dicha generatriz horizontal con la superficie propuesta se tira un plano tangente á esta, la interseccion (GH) de este plano con el horizontal que contiene las curvas nos dará la asintota que buscamos. Si se verificase que este plano tangente que pasa por la generatriz horizontal fuese tambien horizontal, caso que puede presentarse cuando aquella fuese tangente en un punto cúspide de la superficie propuesta, la asintota pasará al infinito, y la forma de la curva seria entonces análoga á la de una parábola. En la práctica, sin embargo, puede prescindirse de hallar las asintotas verdaderas de las curvas referidas, porque no se necesita conocer su posicion absoluta, y solo sí su direccion, como veremos.

APLICACIONES AL CASO DEL PLANO TANGENTE SUPERIOR.

Una vez hallada la interseccion del plano horizontal con el cono tangente á una superficie propuesta, solo resta, como hemos visto anteriormente, para determinar un plano que la sea tangente en circunstancias dadas, tirar á la curva horizontal referida, una tangente que cumpla con las condiciones asignadas al problema. Pero en el caso de que el plano que hayamos de determinar deba dejar debajo de sí toda la superficie, nos restan algunas observaciones que hacer con relacion á la eleccion conveniente de la tangente espresada.

El plano que deje debajo de sí á toda la superficie propuesta deberá llenar la misma condicion respecto de la superficie cónica que la envuelve: por consiguiente, si únicamente tenemos que considerar una curva relativa á una hoja ascendente, como en la figura (91), la proyeccion de la tangente deberá pasar entre la proyeccion de la curva y la del punto dado, bajo el supuesto de ser superior á éste el plano horizontal que corta al cono.

Si, por el contrario, se operase sobre una hoja descendente, como bajo el mismo supuesto las generatrices de la superficie cónica no encontrarian el plano horizontal, sino prolongándolas al otro lado del vértice, opuesto á los puntos de contacto, se sigue que el plano superior á la superficie propuesta y á la hoja descendente del cono que la envuelve, debe ser inferior á la prolongacion de esta hoja al otro lado del vértice, y por consiguiente su interseccion con el plano horizontal arbitrario, ó lo que es lo mismo, la tangente á la curva que contiene, debe dejar toda la curva entre ella y el punto dado.

La condicion que acaba de establecerse, no es suficiente

para determinar de una manera absoluta la referida tangente, ya se opere sobre la curva relativa á una hoja de superficie cónica ascendente ó descendente. El problema, como vimos anteriormente, podrá tener en general una infinidad de soluciones, teniéndose ademas presente que, en el caso que consideramos actualmente, no es indispensable que la recta que hemos designado con el nombre de tangente toque efectivamente la curva en la acepcion geométrica, sino que basta únicamente que pase por uno de sus puntos, dejándola, sí, enteramente de un mismo lado. Si la curva es limitada, como la de la figura citada, será fácil determinar los límites de estas soluciones, puesto que se echará de ver inmediatamente si la tangente, en uno de los puntos de esta curva, no la corta en ningun otro; pero no sucederá lo mismo cuando sus ramas se prolonguen indefinidamente, como en la figura 92 que hemos considerado. Será preciso recurrir entonces á su asintota, ó al menos á su paralela, y deberá desecharse toda tangente, la cual prolongada indefinidamente en el sentido en que se estiende la curva, llegue á cortar la asintota por serle convergente, porque encontraria necesariamente la curva á una cierta distancia, y por consiguiente á la superficie.

Cuando por la disposicion de la superficie propuesta se tengan que considerar á la vez dos hojas pertenecientes, la primera á una hoja ascendente (CD), y la segunda á otra descendente (EF), los límites de la indeterminacion del problema se estrechan, pudiendo llegar el caso de no tener sino una solucion, ó bien no tener ninguna. En efecto, para que el plano que determinemos llene el objeto propuesto de dejar debajo de sí toda la superficie, debe verificarse que ademas de tocarla en una cierta parte, la superior, por ejemplo, no llegue á fijarse en la inferior, y recíprocamente. Segun lo que hemos dicho anteriormente, quedará satisfecha esta condicion si la tan-

gente á la curva relativa á la hoja ascendente del cono, ademas de dejar esta curva del lado opuesto al punto dado, deja tambien por el contrario toda la curva de la hoja descendente hácia la parte opuesta, esto es, si pasa entre las dos curvas tocando ó apoyándose en una de ellas ó en ambas sin cortarlas, como se verifica con las (EL) y (E'L'). Si fuese posible tirar diagonalmente dos tangentes comunes á ambas curvas, quedando cada una de ellas en la disposicion referida, como sucede á las (EL) y (E' L'), estas serian á un tiempo las posiciones límites que podria tomar una horizontal que respondiese al problema, pues bastaria fuese tangente en un punto de la parte de curva comprendida entre los puntos de contacto de las rectas (EL) y (E' L') referidas, y por lo tanto el problema tendria un número indefinido de soluciones. Si sucediese que las dos tangentes en diagonal se confundiesen en una sola recta, el problema seria enteramente determinado, y no tendrá ninguna solucion, cuando no sea posible tirar una tangente á una de las curvas, sin que venga á penetrar la otra, y no quedará duda de esta última circunstancia cuando estas curvas se penetren despues de haberse encontrado.

Si en vez de tener que considerar una sola curva relativa á una hoja ascendente y otra á una descendente, se ofrecieren varias pertenecientes á cada especie, lo que puede verificarse con relacion á una superficie diferentemente ondulada, nada tendriamos que añadir á lo espuesto, pues podrian considerarse todas las curvas de una misma especie como partes diferentes pertenecientes á una misma curva. Seria, sí, indispensable, asegurarse de que la proyeccion de la tangente elegida para horizontal del plano buscado, no solamente era divergente en su prolongacion á la de la asintota de la curva, á la cual fuese tangente, sino que llenaba tambien en particular la misma condicion, con referencia á cada una de las demas curvas.

PLANOS TANGENTES POR UNA RECTA DADA.

Dada una superficie por medio de sus curvas de nivel, tirarle planos tangentes que pasen por una recta designada.

Sabemos que el problema puede resolverse eligiendo dos puntos en la recta por la cual deba pasar el plano y mirándolos como vértices de superficies cónicas, que envuelvan tangencialmente á la propuesta, pues los planos tangentes comunes cumplirán con las condiciones exigidas; pudiendo tambien bastar el determinar una sola superficie cónica, puesto que la recta propuesta pasa por su vértice. Sin embargo, á pesar de la sencillez de los métodos que hemos espuesto para llegar á estos resultados, no dejan de ser embarazosos por la repeticion de las mismas operaciones en cada una de las generatrices. Vamos, pues, á separarnos del método general indicado, esponiendo otros procedimientos, los que segun la naturaleza especial de las superficies que nos ocupan, nos conducirán con suma facilidad á los resultados que apetecemos. Para esto nos propondremos resolver, como preliminar, el problema siguiente.

Dado un conoide cuyas directrices sean una recta y una curva arbitraria, tirarle planos tangentes, de modo, que pasando por la directriz recta no corten á la curva, en las inmediaciones de la generatriz de contacto.

El problema será determinado.

En efecto, del enunciado se sigue inmediatamente, que los planos que buscamos han de envolver alguna de las tangentes á la curva directriz referida, y que no deben cortar al conoide, supuesto este terminado en la directriz rectilínea, sino segun esta misma línea; de donde se infiere, que los planos enunciados no pueden existir, sino siendo tangentes al conoide en elementos planos segun el sentido de sus generatrices, los que solo pueden ser debi-

dos á la forma particular de la curva directriz espresada, ó bien á su posicion con relacion á la recta.

Esto supuesto, para resolver el problema debemos determinar desde luego cuáles son, en sentido de las generatrices, los elementos planos del conoide: estos estarán necesariamente limitados por generatrices inmediatamente paralelas. por lo que á la investigacion de estas estará todo reducido.

El conoide supone desde luego un plano director, por lo cual las proyecciones de dos generatrices paralelas deberán serlo igualmente, verificándose tambien, que dos proyecciones paralelas no pueden pertenecer sino á generatrices de la misma especie: facil será pues el señalarlas cuando existan, obtenida la proyeccion de la superficie. Sin embargo, no siempre se presentará á la vista de una manera esplícita, el paralelismo de dos generatrices del conoide, y esto se verificará cuando sean infinitamente próximas, pero aun en este caso, será igualmente sencillo el descubrir cuáles sean los elementos planos que investigamos.

En efecto, siguiendo los ángulos que las proyecciones de las generatrices del conoide forman con la de la recta directriz, puede suceder, que á partir de un punto dado vayan decreciendo hasta una posicion límite desde la cual empiecen sucesivamente á crecer ó á la inversa: en ambos casos, el referido ángulo no puede haber llegado de decrecer á crecer, ó al revés, sin haber pasado por *cero*, ó lo que es lo mismo por una posicion constante en la cual existen necesariamente dos generatricos paralelas, aunque infinitamente próximas.

Para resolver pues, en conclusion, el problema indicado, basta señalar las proyecciones de las generatrices del conoide paralelas dos á dos é inmediatamente próximas, ó bien aquellas en que se verifiquen cambios en el ángulo

que forman con la proyeccion de la directriz recta en que se apoyan, y determinar los planos que las contienen.

El número de cambios de ángulo nos espresará el de soluciones que tiene el problema.

Volvamos ahora al problema primitivo.

CUANDO LA RECTA ES MUY INCLINADA.

Sea (SS′) la superficie propuesta y (AB) la recta por la cual se le han de tirar planos tangentes. Lám. 16.

Estando la superficie y la recta dadas, cortadas ya por la misma série de planos horizontales, elijamos el horizontal de proyeccion por plano director de un conoide, cuyas generatrices, apoyándose en la recta (AB), sean tangentes á la superficie (SS′). La proyeccion del conoide referido se obtiene desde luego con solo tirar, desde los puntos acotados de la recta, tangentes á las curvas de igual cota, y no será otra cosa que una superficie que envuelve tangencialmente á la propuesta: á esta serán pues tambien comunes los planos tangentes á aquella, que lo sean segun las anteriores condiciones. Fig. 93.

Por lo espuesto anteriormente, ninguna dificultad puede envolver el determinar los planos tangentes al conoide, pues siguiendo los ángulos que las proyecciones de sus generatrices forman con la de la recta (AB) propuesta, se advierten desde luego en las horizontales (7) y (12) dos soluciones del problema; combinando dichas horizontales con la recta (AB) propuesta, obtendremos las escalas de pendiente (A′ B′) y (A″ B″) de los planos tangentes que buscamos.

En efecto, envolviendo el conoide (AB SS′) tangencialmente la superficie (SS′), existirán á las inmediaciones del punto (12) dos horizontales infinitamente próximas tangentes á la superficie, las que, por ser paralelas, se

apoyan al mismo tiempo en la recta (AB), comprendiendo uno de sus elementos; el plano (A′ B′) que pasa por dichas horizontales llenará pues todas las condiciones del problema, puesto que pasa por la recta dada y envuelve ademas un elemento de la superficie propuesta.

Lo que acabamos de decir, bien se vé, que solo tendrá lugar, bajo el supuesto de que la curvatura de la superficie dada sea continua en sentido de la curva (SS′) de contacto del conoide, pues en otro caso, tal como el suponerla sustituida por el polígono inscrito, se verificará que las generatrices del conoide pasarán por los puntos vértices de él, y los planos que pasen por ellas y la recta propuesta solo contendrán una tangente á la superficie, siéndole por lo tanto rasantes, á escepcion del caso en que la horizontal generatriz superior ó inferior á la que nos hemos referido sea paralela á ella, pues entonces el plano que resulte será rigorosamente tangente.

Estando necesariamente en la práctica, espaciadas una cierta cantidad las curvas que definen una superficie, se sigue que los planos que determinemos, bajo las condiciones del problema anterior, serán siempre rasantes á la superficie, á no ser que envuelvan dos horizontales casualmente paralelas; sin embargo, haciendo abstraccion del modo aproximado de representar la superficie sustituyendo zonas regladas á sus zonas verdaderas, podemos mirar las soluciones prescritas como rigorosas, pues esto seria lo mismo que considerar restablecida la curvatura continua en la superficie propuesta.

La curvatura arbitraria de las superficies que nos ocupan, espresada por las inflexiones caprichosas de sus curvas de nivel, dará regularmente por consecuencia en el problema de que tratamos, que los planos que la sean rigorosamente tangentes, producirán en ella intersecciones, si bien fuera del elemento de contacto: tal se verifica con

los dos planos (A′ B′) y (A″ B″) últimamente determinados, los cuales aunque son tangentes á la superficie (SS′) en los puntos (12) y (7), el primero produce una interseccion en la parte inferior de la superficie, produciéndola en la superior el segundo.

No nos detendremos en investigar las posiciones de los planos tangentes con relacion á la superficie, ni tampoco los casos á que pertenecen los cambios del ángulo de las generatrices del conoide con la proyeccion de la recta propuesta, ya sean *mínimos* ó *máximos*. La posicion general del plano tangente con relacion á la superficie, sabemos deducirla de la consideracion de sus horizontales en las zonas inmediatas al punto de contacto, y será inútil entrar en detalles sobre los otros casos, porque como solo consideramos los planos tangentes en la parte comprendida entre la recta propuesta y la superficie, estamos en el caso de un plano limitado que gira al rededor de una recta trazada en él, y sabemos que los ángulos *máximos* cortados hácia la parte descendente de la recta referida, pertenecen á planos tangentes á partes cóncavas de la superficie en sentido de sus líneas de pendiente, puesto que determinan sus posiciones mas deprimidas, refiriéndose los *mínimos*, por la inversa, á sus posiciones mas altas, ó lo que es lo mismo, á planos tangentes á la superficie en partes convexas en el mismo sentido de sus líneas de pendiente, cualquiera que sea en ambos casos su curvatura en el de sus líneas horizontales.

Síguese de aqui, que si entre todos los planos tangentes á una superficie pasando por una recta, queremos elegir aquellos que la dejen debajo de sí, en las inmediaciones, á lo menos, del punto de contacto, debemos desechar todos los planos dados por horizontales cuyos ángulos con la proyeccion de la parte descendente de la recta propuesta sean *máximos*, siendo el plano determinado por el

menor de los *mínimos* el que cumplirá mejor que los otros con la última condicion exigida, porque formaria con el horizontal el mayor ángulo posible.

Hasta ahora hemos supuesto, que existian efectivamente, en la solucion del problema que nos ocupa, los cambios de ángulo de que hemos hablado con relacion á las generatrices del conoide; pero se vé fácilmente que puede suceder muy bien, que la variacion de dichos ángulos sea tal, que aumenten ó disminuyan progresivamente, sin llegar á tocar *máximo* ni *mínimo*; en este caso el problema no tiene solucion, esto es, que por la recta propuesta no es posible tirar á la superficie un plano, que la sea rigorosamente tangente.

En la práctica, sin embargo, ocurren casos en los que suele interesar menos esta exactitud geométrica, que el obtener planos, que si bien únicamente rasantes á la superficie, cumplan con otras condiciones, de las que ya hemos hablado en otro lugar y que nos van á ocupar de nuevo.

Propongámonos hacer pasar por una recta un plano, que apoyándose en una superficie, la deje toda debajo de sí sin cortarla en ninguna parte, de cualquier modo que se halle terminada.

Sea (S) la superficie y (AB) la recta dada.

Lám. 17. Fig. 94. Desde luego, el conoide que apoyándose en la recta envuelva la superficie, ha de ser tal, que ninguna de sus generatrices la penetre en parte alguna; de aqui resulta una nueva condicion para fijar la proyeccion de las generatrices del conoide, que escluirá regularmente la de tangencia á la curva sobre que se apoyan. En efecto, en cualquier otro punto de la curva (5) en que se apoyará, por ejemplo, la generatriz de igual cota del conoide, se verificará ó que penetrará la superficie, en cuyo caso el plano que pasase por ella y por la recta (AB) la penetrará tambien, ó bien que el mismo plano la dejará toda por

encima; como ninguno de los dos estremos es admisible en el caso que nos ocupa, se sigue que entre todas las rectas que pasando por el punto (5) de la recta (AB), pueden apoyarse en la curva (5) de la superficie, la única que podrá responder al problema será aquella cuya proyeccion forme con la de la recta el menor ángulo hácia su parte descendente, como sucede á la generatriz (5) que hemos proyectado en la figura.

Sujetando al mismo principio la determinacion de las generatrices restantes, llegaremos á obtener el conoide (ABS) que se apoya en la superficie (S), sin cortarla en ninguna parte, dejándola ademas toda debajo.

Una vez obtenido el conoide nos será muy fácil determinar el plano que buscamos, eligiendo por horizontal aquella generatriz, cuya proyeccion forma con la descendente de la recta el menor ángulo, sea ó no un *mínimo*. La (11) resuelve el problema en la figura.

El plano (A′ B′) que resulta es restante á la superficie; hubiera sido tangente si la horizontal (11) en vez de tocar solo en un punto á la superficie, hubiera tenido con ella un elemento comun, porque comprende un ángulo *mínimo*.

Hemos supuesto constantemente que la recta por la cual debe pasar el plano tangente á la superficie y esta última, son encontradas en la estension proyectada, por la misma série de planos horizontales, resultando de aqui gráficamente espresadas las mismas cotas para ambas; puede suceder que la recta dada sea horizontal, ó que solo sea encontrada en la estension del papel en uno ó dos puntos, por la série de planos que causa las secciones de nivel en la superficie. En el primer caso, la cota de la recta tendrá ó no alguna igual en la superficie, y lo mismo sucederá en los otros dos, aunque en estos últimos podemos contar siempre con dos cotas conocidas, solo que en el uno, una de ellas deberá ser fraccionaria.

Vamos á examinar estos casos y hacer ver que ninguna complicacion se sigue de esto en la resolucion del problema.

CUANDO LA RECTA TIENE POCA INCLINACION.

1.° Dada una recta tan poco inclinada que no tenga sino dos cotas en el papel, tirar por ella planos tangentes á una superficie determinada por curvas horizontales.

Cuando resolvimos el problema de tirar planos tangentes á un conoide, que cumpliesen con las condiciones que entonces enunciamos, no se fijó en manera alguna el que su plano director fuese horizontal, pudiendo por el contrario tener una inclinacion cualquiera, sin que esto influya de ningun modo en la solucion que dimos al problema. Si nos hemos valido para resolver el caso anterior de conoides de generatrices horizontales, ha sido por la facilidad que daba para determinarlos la disposicion de las cotas de la recta y la superficie; pero se vé desde luego que, teóricamente hablando, los mismos resultados hubiéramos obtenido, por idénticas observaciones del ángulo que formaban con la recta dada, las generatrices de otros conoides cualesquiera que hubiéramos empleado.

Si suponemos pues en el problema presente, que tenemos proyectado un conoide cualquiera que apoyándose en la recta dada envuelva la superficie, los cambios de ángulo de las proyecciones de sus generatrices con relacion á la de la recta propuesta nos darán las soluciones del problema, quedando determinados los planos tangentes por la recta indicada, y la generatriz del conoide relativa á cada uno de los puntos de tangencia.

Vamos á hacer ver que la série de estas operaciones gráficas no presenta las dificultades y embarazos que á primera vista parecen ofrecerse.

Sea (S) la superficie y (AB) la recta dada por sus dos cotas (5 y 6). Lám. 18. Fig. 96

Concibamos un plano inclinado cualquiera que corte á la recta (AB) y tracemos sus horizontales: en la figura se ha hecho pasar dicho plano por el punto acotado (5) en la recta (AB); su inclinacion ha resultado de la separacion que hemos creido conveniente dar al sistema de líneas paralelas trazadas, que espresan las horizontales del plano de que hemos hecho mencion, y cuya direccion ha sido fijada por la condicion de que corten cómodamente, esto es, bajo ángulos bien marcados, la generalidad de las curvas horizontales de la superficie.

Trazado este sistema de líneas paralelas equidistantes á partir del punto (5), nada mas fácil que determinar una de las generatrices (5–D) del conoide que ha de envolver la superficie apoyándose en la recta, marcando primero la curva interseccion (CD) y tirándole desde el punto (5) una tangente.

Tomando el plano inclinado referido, ú otro paralelo como *director* del conoide, podemos proyectar otra de sus generatrices, hallando la seccion causada en la superficie por un plano paralelo al anterior, y tirándole, como anteriormente, una tangente desde el punto en que dicho plano encuentra á la recta (AB). Para hacer esta construccion, no tenemos necesidad de tirar en el papel nuevas líneas que nos espresen el plano indicado, pues nos basta únicamente suponer variada la cota relativa á las horizontales espresadas por el sistema de líneas paralelas equidistantes anteriormente trazado. En efecto, suponiendo á la cuarta horizontal la cota (5), obtendremos desde luego la curva (C′ D′) interseccion de este nuevo plano con la superficie, y tirándole la tangente (ED′) desde el punto (E) en que la recta (AB) es encontrada por el mismo plano, tendremos en ella otra gene-

ratriz del conoide. Nos es conocida la sencillez con que se resuelve el problema de hallar la interseccion de un plano con una recta, ademas de que únicamente necesitamos hacer uso una vez de este procedimiento, pues suponiendo los planos paralelos equidistantes, serán iguales las partes de recta interceptadas entre ellos. En la figura para mayor sencillez y exactitud en la construccion, se ha elegido un plano *seis* unidades mas bajo que el (CD) que pasa por el punto (5) de la recta, el que nos produce el punto (K) de interseccion con ella; dividiendo en *seis* partes iguales la estension (5,K), obtendremos todos los puntos en que los planos paralelos referidos, distantes entre sí una unidad, encuentran á la recta propuesta en la estension referida; fácil es señalar los mismos puntos para los planos restantes.

Reasumiendo lo que llevamos espuesto, vemos que para determinar gráficamente las generatrices del conoide que investigamos, basta trazar en el papel un sistema de rectas paralelas equidistantes, unir por medio de curvas ordenadamente trazadas, los vértices de los cuadriláteros curvilíneos que resultan de la interseccion de las paralelas con las curvas horizontales de la superficie, tirándoles tangentes desde los puntos de la recta, existentes en los mismos planos de las curvas. Podemos tambien dispensarnos de trazar las curvas referidas como hemos hecho en la generatriz (E′ D″) tangente á la curva (C″ D″) marcada solo por algunos de sus puntos. Vemos pues que la determinacion del conoide está reducida á trazar en el papel dos sistemas de rectas, las cuales en el uno son paralelas y en el otro resultan fácilmente del primero.

Una vez trazadas gráficamente las generatrices del conoide que apoyándose en la recta envuelve la superficie, nos es sumamente fácil determinar las soluciones del problema que nos ocupa. Sabemos que estan dadas

por los elementos planos del conoide y estos por los cambios de ángulo de sus generatrices; suponiendo que esto se verifique en la (ED′) el plano (A′B′) determinado por ella y la recta (AB), será uno de los que investigamos. Como el punto (D′) no está geométricamente determinado por la falta de continuidad en la superficie, lo que ya hemos hecho notar en otro lugar, puede suceder que el plano tangente (A′ B′) produzca en el punto referido una ligera interseccion, la que por su naturaleza debe mirarse, como que no afecta la solucion que hemos dado al problema.

Los planos tangentes de que tratamos, pueden sujetarse, como en los casos anteriores, á llenar otras condiciones. Si se tratase de investigar cuál de ellos formaba el mayor ángulo con el horizontal, desde luego veriamos que pasando todos por la recta (AB) cumpliria con esta condicion el (A′ B′) que comprende la generatriz (ED′) que es la mas inclinada. En efecto, existiendo todas en planos paralelos, tendrá mas inclinacion aquella que corte con menos oblicuidad las horizontales del plano que la contiene.

Pudiera tambien pedirse que el plano tangente dejase debajo de sí toda la superficie sin cortarla en ninguna parte, cuya condicion llenaria mas cumplidamente que los demas planos el últimamente determinado, en caso de poder ser satisfecha con planos tangentes rigorosamente tirados.

Igualmente sencillo seria el caso que acabamos de considerar, si se tratase solo de determinar planos que pasando por la recta (AB) y apoyándose en la superficie, la dejasen toda debajo de sí aunque solo tubiesen un punto comun con ella. Nada nuevo tenemos que esponer para llegar á este resultado; en vez de tirar las generatrices (ED′), tangentes esclusivamente á las curvas (C′ D′), las tiraremos rasantes en el caso de penetrar la superficie, de modo que

esto no sucediese como hemos hecho ya anteriormente: la generatriz de mas inclinacion llenará mejor que las otras la última condicion enunciada.

CUANDO LA RECTA ES HORIZONTAL.

2.° Supuesta una recta horizontal, hacer pasar por ella planos tangentes á una superficie dada por curvas de nivel.

Sea (S) la superficie y (AB) la recta dada.

Lám. 17. Siguiendo en nuestro propósito de aplicar á cada caso Fig. 25. particular la solucion mas sencilla, en vez de determinar un conoide como en el caso que acabamos de considerar, lo que seria mas complicado, envolveremos la superficie por un cilindro horizontal paralelo á la recta dada: el plano tangente á este cilindro que contenga la recta (AB), lo será igualmente á la superficie (S) cumpliendo las condiciones del problema. Las generatrices del cilindro enunciado quedarán determinadas, tirando, paralelamente á la (AB), tangentes á todas las curvas de la superficie; resta únicamente señalar cuál de estas generatrices, en union con la recta (AB), determinará el plano tangente que investigamos.

Si por un punto cualquiera de la recta (AB) tiramos una tangente al cilindro que envuelve la superficie (S), la generatriz que pase por el punto de contacto será la que buscamos. Para esto, por el punto acotado (10), por ejemplo, de la recta (AB), haremos pasar arbitrariamente un plano vertical (10–18), el cual cortará al cilindro enunciado segun una curva (12–13–14–etc.), y tiraremos una tangente á esta seccion: ninguna dificultad puede ofrecernos este problema, viéndose desde luego que la recta (10–15) es la tangente que buscamos, la que determina la horizontal (15), que en union con la (10), nos dá el plano (A′ B′) que nos hemos propuesto encontrar.

Observaciones análogas á las de los casos anteriores pudiéramos hacer aqui, acerca de la discontinuidad de la superficie y acerca del plano que la dejase toda debajo de sí sin cortarla en ninguna parte; lo que hemos dicho, sin embargo, es enteramente aplicable á todos los casos, por lo que escusaremos repetirlo.

PLANOS TANGENTES PARALELOS A UNA RECTA DADA.

Dada la recta (AB) y la superficie (S), tirar á esta planos tangentes que sean paralelos á aquella. Lám. 18.

La solucion del problema estará reducida, en general, á determinar un cilindro paralelo á la recta dada que envuelva á la superficie propuesta, pues tendrán sus planos tangentes comunes, y los del cilindro envolverán tambien la condicion de ser paralelos á la recta. Fig. 97.

Hagamos pasar un plano arbitrario por la recta (AB): en la figura estará espresado por la série de rectas paralelas (15, 14 etc.): este plano producirá en la superficie (S) una interseccion (12–C), cuya tangente (DE) será una generatriz del cilindro que buscamos. Un plano paralelo al anterior una unidad mas bajo, nos dará una nueva generatriz (FG), y continuando de este modo podremos obtener el cilindro circunscrito á la superficie (S) paralelo á la recta (AB), y cuya curva de contacto será la (SON).

La solucion gráfica de este problema preliminar está reducida, como ya hemos hecho observar en otro análogo, á trazar en el papel un sistema de rectas paralelas que corten bajo ángulos bien marcados la generalidad de las curvas de la superficie propuesta, unir por medio de curvas, ordenadamente trazadas, los vértices de los cua–

driláteros curvilíneos que resultan de sus mútuas intersecciones, y tirar finalmente tangentes á estas curvas, paralelas á la recta propuesta.

Cada dos de las generatrices del cilindro determinado como acabamos de esponer, nos dará un plano que llenará las condiciones del problema. En la figura se ha determinado el (A′ B′) comprendido por las generatrices (DE) y (FG).

Puede tambien bastarnos hacer pasar el plano por una sola generatriz del cilindro, pues la otra tangente que necesitamos para determinarlo, puede ser la horizontal tangente á la curva de la superficie (S), que pase por el punto designado de tangencia.

En la figura la recta (AB) no contiene sino dos cotas en el papel: no entraremos en mas discusiones acerca de este problema, porque se ofrecen claramente á la vista todas sus variedades, despues de lo que ya hemos indicado en otros semejantes.

PLANOS TANGENTES PARALELOS A UN PLANO DADO.

La solucion de este problema bajo el sistema de proyeccion que nos ocupa, es sumamente sencilla.

El método general consiste en elegir dos rectas en el plano propuesto, circunscribir á la superficie dada dos cilindros, paralelos respectivamente á las rectas referidas, y determinar el plano tangente á la vez á ambos. En el caso presente un solo cilindro horizontal nos es bastante á determinar todas las condiciones del plano que investigamos.

Lám. 19. Sea (AB) el plano dado, y (S) la superficie.

Fig. 98. Elijamos en el plano (AB) una recta directriz y sea esta una de sus horizontales; tirando en la superficie tangen-

tes á sus curvas de nivel, paralelas á la directriz indicada, obtendremos desde luego un cilindro convenientemente situado para la resolucion del problema, siendo (CD) su curva de contacto con la superficie (S) propuesta. Ahora bien, si se hallasen en este cilindro dos generatrices, inmediatamente próximas, cuya distancia horizontal fuese igual á la de dos horizontales análogas del plano (AB), el plano que pasase por ellas no podria menos de ser tangente á la superficie dada, y ser paralelo al propuesto. En el caso en que no se hallasen dos generatrices en las anteriores circunstancias, nos resolveria el problema aquella en que se verificase, comparada con las dos inmediatamente próximas, que su distancia horizontal relativamente á cada una de ellas, era mayor, y menor, que la que separa dos horizontales del plano (AB) indicado. La horizontal (9) cumple en la figura con las referidas condiciones; el plano (A′ B′) es, pues, el que buscamos.

Cuando ninguna de las condiciones prescritas tuviese lugar, el problema no tendria solucion; en las demas variedades del problema nos referiremos tambien á los casos anteriores.

PLANOS TANGENTES A LA VEZ A DOS SUPERFICIES.

Envueltas tangencialmente dos superficies por otra reglada, los planos tangentes á esta lo serán igualmente á la vez á las envueltas.

Despues de todo lo que hemos espuesto, no puede ofrecer dificultades la solucion del problema. Un sistema cualquiera de rectas paralelas puede espresarnos un plano director arbitrario; una série de planos equidistantes paralelos al director, cortará á las dos superficies supuestas,

segun un sistema de curvas planas, cuyas tangentes llenarán la condicion de ser generatrices de una superficie reglada, que envuelva tangencialmente á las dos superficies á que hemos hecho referencia. Esta superficie será en general un conoide: sus planos tangentes, comunes á las dos superficies que envuelve, estarán dados por sus generatrices paralelas dos á dos inmediatamente próximas, ó bien por los cambios de ángulo relativos de las mismas generatrices.

Sin embargo, la solucion gráfica es como se deja conocer, algo embarazosa, por lo cual en la práctica se recurre ordinariamente á métodos de tanteo mas sencillos en este caso particular, y al mismo tiempo suficientemente aproximados.

En igual caso se encuentra el problema de determinar el plano tangente á la vez á tres superficies, por lo cual nos referiremos á él en cuanto pudiéramos decir del anteriormente enunciado.

PLANOS TANGENTES A TRES SUPERFICIES A LA VEZ.

Por las razones acabadas de esponer, aplicaremos á este problema una solucion por tanteo. Nada fijo puede decirse sobre este punto, como es natural; la observacion, la práctica en deslindar la forma y curvaturas en todos sentidos de las superficies espresadas por curvas de nivel, puede solo guiarnos con acierto.

Sean (S), (S′) y (S″) las tres superficies propuestas, y á las que tratamos de tirar un plano tangente comun que las deje debajo sin cortarlas.

Observando las cotas de estas tres superficies, vemos desde luego, que con relacion á la (S), el plano tangente

comun debe deprimirse hácia la (S′), y sufrir otra depresion hácía la (S′′), girando sobre la recta que una sus puntos de contacto con las (S) y (S′).

La condicion de que el plano que buscamos ha de dejar debajo de sí las tres superficies propuestas, nos espresa desde luego que las rectas que han de determinarlo, deben ser tales que no las penetren de ningun modo.

Procedamos por partes, fijémonos primero en las dos superficies (S) y (S′) y tracemos la tangente (AB) á ambas, la cual se observa fácilmente, comparando la distancia horizontal que separa una unidad de diferencia de cotas en ella y las superficies, que no las corta en ninguna parte.

Bien se ve tambien que esta recta (AB) no es la única que, en el caso presente, pudiéramos tirar con iguales condiciones; desde el punto (12) de la superficie (S′), desde el (13) de la (S) ó bien desde diferentes puntos de las curvas inferiores, pudiéramos tirar multitud de rectas semejantes: sin embargo, seria lo probable, vista la posicion deprimida de la superficie (S′′) que el plano que comprendiese cualquiera otra recta que la (AB), cortase la una ó la otra superficie. Ciertos como estamos de que podrán hacerse pasar por la recta (AB) muchos planos entre límites bastante marcados, sin que corten á la superficie (S) y (S′), la elegiremos como charnela de un plano que gire sobre ella hasta apoyarse en la superficie (S′′).

Tomemos, pues, un punto arbitrario sobre la recta (AB) el (12), por ejemplo, y hagamos pasar por él otra recta (CD), que se encuentre con relacion á las superficies (S′) y S′′), en circunstancias idénticas á las en que se hallaba la (AB) con relacion á las (S) y (S′).

Determinaremos el plano dado por las dos rectas (AB) y (CD), cuyas horizontales son las (8), (9), (10), (etc.) y verifiquemos si corta alguna de las tres superficies pro-

puestas: la (S′) es encontrada por él, no cumple pues, el plano (BCD) con las condiciones del problema.

Pero observemos; si la horizontal (9) distase mas de la (8), de modo que no encontrase la curva (9) de la superficie (S″), el problema quedaria definitivamente resuelto: es, pues, necesario elegir en vez de la recta (CD) otra mucho menos inclinada, para que combinada con la (AB) nos dé para el plano determinado por ambas, horizontales mas espaciadas: la (CE) que se apoya en la curva (10) de la superficie (S′), cumple estas condiciones; el plano (FG) que determina con la (AB), toca á la vez á las tres superficies (S), (S′) y (S″) propuestas, sin cortarlas en parte ninguna.



ÍNDICE.

INTRODUCCION.

CAPITULO I.

DESARROLLO DEL SISTEMA.

CAPITULO II.

INTERSECCION DE SUPERFICIES.

SECCIONES PLANAS DE LAS SUPERFICIES CURVAS.

Problemas.

CAPITULO III.

PLANOS TANGENTES A LAS SUPERFICIES.

PLANOS TANGENTES CUYO PUNTO DE TANGENCIA NO ES DADO.

FLANOS TANGENTES POR UNA RECTA DADA.

FIN DEL INDICE.

ERRATAS IMPORTANTES.

PAGINAS.	LINEAS.	DICE.	DEBE DECIR.
27. . . .	10.	ellos por.	ellos con el otro por.
28. . . .	Márgen . .	Fig. 35.	Fig. 25.
29. . . .	12.	(D′).	(D).
34. . . .	Márgen . .	Lám. 7.	Lám. 7.—Fig. 45.
35. . . .	18.	(F).	(F′).
45. . . .	2.	(AC).	(CD),
id. . . .	18.	$\frac{m}{n}$.	$\frac{1}{m}$
48. . . .	26.	(A′ C′ D′).	(A′ C′ B′)
53. . . .	7.	(C).	(6)
54. . . .	16.	Disentiremos. . .	Discutiremos.
55. . . .	19.	mínima.	misma.
81. . . .	20.	Cortados.	Contados.
83. . . .	19.	restante.	rasante.